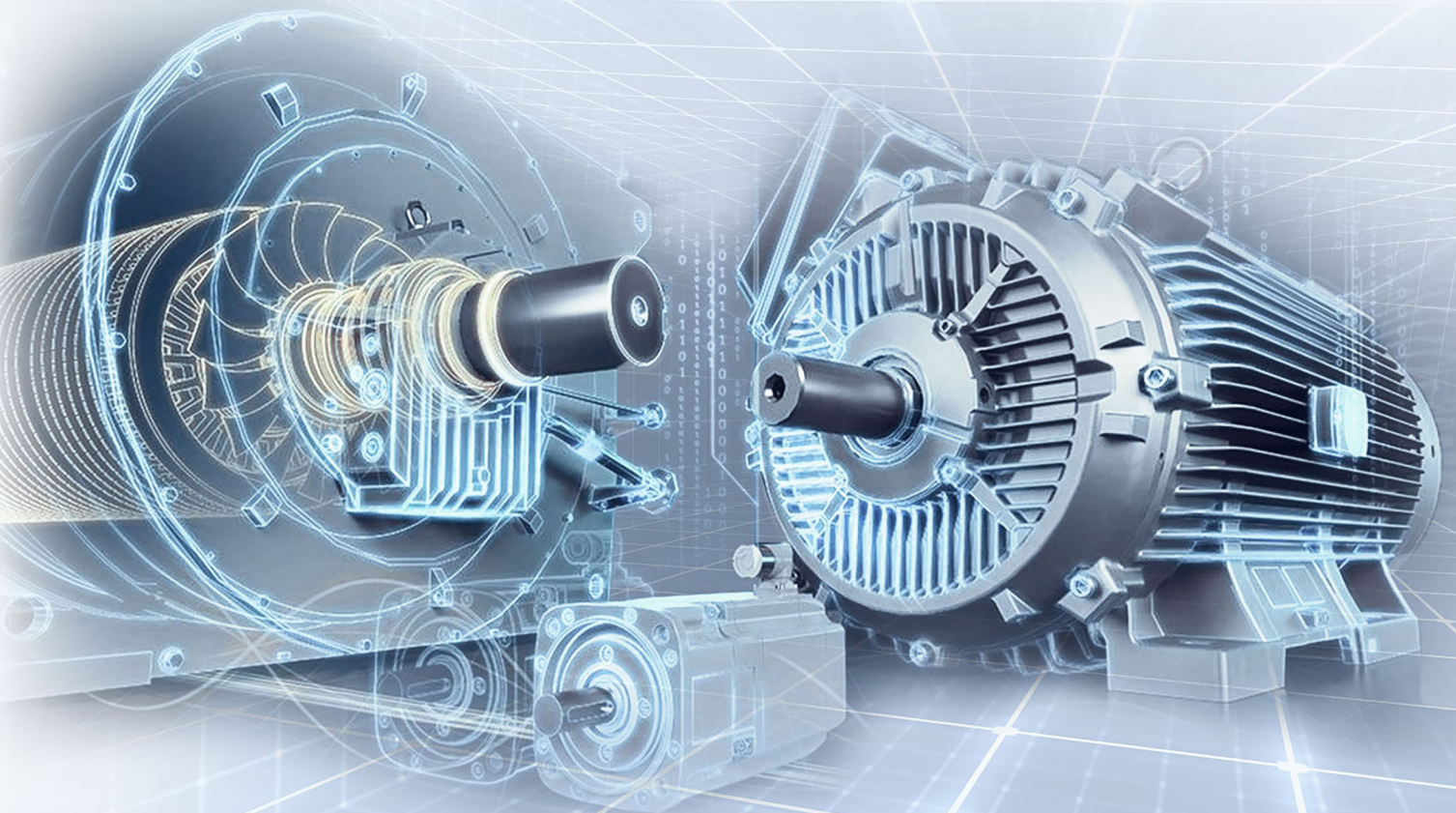


Баннов Д.М., Полищук В.И.

РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИН



Монография 2025

Югорский государственный университет

Баннов Д.М., Полищук В.И.

РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО
МОДЕЛИРОВАНИЯ
ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ
МАШИН

Монография

Москва
Альпен-Принт
2025

УДК 621.313
ББК 31.24
Б31

Рекомендована к печати:
Методическим советом Политехнической школы ЮГУ

Авторы:

Баннов Д.М. – кандидат технических наук, доцент кафедры «Электрические станции», Самарского государственного технического университета
Полищук В.И. – доктор технических наук, профессор, профессор Политехнической школы Югорского государственного университета

Рецензенты:

Ковалев В.З. – доктор технических наук, профессор, профессор Политехнической школы Югорского государственного университета

Б31 Баннов Д.М., Полищук В.И.

Развитие теории математического моделирования электрических машин : монография [Электронное сетевое издание] /

Д. М. Баннов, В. И. Полищук. —

Москва : ООО «Альпен-Принт», 2025. —

1 электрон. ресурс (104 с.) : ил.

ISBN 978-5-6055294-5-3 (*электронное сетевое издание*)

EDN: IATUXL

DOI: 10.65551/978-5-6055294-5-3.2025

Режим доступа: <https://book.nauchizdatel.ru/index.php/ni/catalog/book/mru04-2025>

В монографии рассмотрены теоретические основы и методы математического моделирования синхронных и асинхронных электрических машин с учётом внутренних повреждений. Обоснованы подходы к переходу от систем дифференциальных уравнений к дискретным алгебраическим моделям, а также методы расчёта магнитных полей в торцевой зоне машин. Предлагаются усовершенствованные математические модели, алгоритмы диагностики и бездатчиковые методы определения параметров работы машин. Результаты имеют значение для разработки современных систем технической диагностики и релейной защиты, направленных на повышение надёжности и эксплуатационной эффективности электрических машин. Монография предназначена для научных работников, инженеров, аспирантов и студентов электротехнических специальностей, а также преподавателей вузов, занимающихся вопросами моделирования, диагностики и защиты электрооборудования.

© Баннов Д.М., Полищук В.И., 2025

© ООО «Альпен-Принт», 2025

СОДЕРЖАНИЕ

Обозначения и сокращения	4
Введение	11
ГЛАВА 1. РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СИНХРОННЫХ МАШИН	13
1.1. Моделирование синхронной машины	13
1.2. Представление системы дифференциальных уравнений в алгебраической форме с помощью билинейного преобразования.....	16
1.3. Моделирование магнитных полей рассеяния от обмоток статора и ротора в торцевой зоне	25
1.4. Моделирование магнитного поля воздушного зазора.....	35
1.5. Моделирование магнитного поля торцевого щита.....	37
ГЛАВА 2. РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ АСИНХРОННЫХ МАШИН	42
2.1. Моделирование статорной обмотки.....	42
2.2. Реализация математической модели АД с короткозамкнутым ротором при моделировании повреждений в обмотке ротора.....	51
2.1.1. Моделирование роторной цепи	57
2.3. Определение частоты вращения и скольжения АД.....	59
Заключение	66
Список литературы	68
Приложение.....	69

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

СМ	- синхронная машина;
СГ	- синхронный генератор;
ДМП	- индукционный датчик магнитного поля;
ПЭВМ	- персональная электронная вычислительная машина;
ЭДС	- электродвижущая сила;
ВЗ	- витковое замыкание;
ИНС	- искусственные нейронные сети;
БФОС, БВПС	- блоки формирования однополярного сигнала и выделения периодической составляющей;
АСТД	- автоматизированные системы технической диагностики;
U_A, U_B, U_C, U_f	- напряжения на выводах обмоток статора и ротора;
$\Psi_A(t), \Psi_B(t),$ $\Psi_C(t), i_A(t),$ $i_B(t), i_C(t)$	- полные потокосцепления и токи обмоток фаз статора;
$\Psi_f(t), i_f(t)$	- потокосцепление и ток обмотки возбуждения;
$\Psi_{kd}(t), i_{kd}(t)$	- потокосцепление и токи замкнутых витков;
$R_A, R_B, R_C, R_f,$ R_{kd}	- приведенные сопротивление обмоток фаз статора, ротора и замкнутого витка;
L_{m0}	- среднее значение индуктивности фаз;
L_{m2}	- амплитуда по отношению к среднему значению;
α	- угол между продольной осью приведенной обмотки ротора и осью фазы А;
L_{md}, L_{mq}	- главные индуктивности фаз по продольным и поперечным осям;
$L_{\sigma A}, L_{\sigma B}, L_{\sigma C}$	- индуктивности рассеяния фазных обмоток статора;
$\lambda_{ad}, \lambda_{aq}$	- коэффициенты проводимости зазора по продольной и поперечной осям;
w_1	- число витков обмотки статора;
k_{01}	- обмоточный коэффициент обмотки статора;
τ	- полюсное деление;
δ	- величина воздушного зазора;
k_δ	- коэффициент Картера;
l_δ	- длина воздушного зазора;
$L_{\sigma AB}, L_{\sigma BC},$ $L_{\sigma CA}$	- взаимная индуктивность рассеяния фазных обмоток;
y_i, z_j	- координаты i, j -го отражения проводника;
μ_0	- относительная магнитная проницаемость;
y, z	- координаты точки, в которой определяются аксиальная $B_z(i, j)$ и радиальная $B_y(i, j)$ составляющие индукции магнитного поля отражений;

l_x	- длина проводника, вдоль которого и разворачивается машина;
K_y, K_z	- коэффициенты коррекции;
b_x	- расстояние от точки расчета индукции до центра проводника;
d_x	- расстояние от точки расчета индукции до конца проводника;
μ_c	магнитная проницаемость ферромагнитных элементов;
β	- коэффициент укорочения обмотки статора;
$B_{y1,k}(x), B_{z1,k}(x)$	- распределение радиальной и аксиальной составляющих индукции магнитного поля от k -й пары элементов лобовой части витка секции;
$B_{y1,\nu}, B_{z1,\nu}$	- радиальная и аксиальная составляющие индукции магнитного поля от i -й секции обмотки статора;
$z1$	- число секций обмотки статора;
y_i, z_j	- координаты i, j -го отражения проводника;
B_δ	- индукция магнитного поля воздушного зазора;
n	- число полюсных делений;
$\Phi 1, \Phi 2$	- полосопропускающие фильтры;
$\Phi 3$	- пропускающий фильтр для выделения из разности ЭДС;
ПЭ	- пороговый элемент для выставления установки срабатывания защиты;
ВН	- выключатель нагрузки;
E_{mr}	- амплитудное значение первой гармонической ЭДС от токов в обмотке ротора;
E_m^+, E_m^-	- амплитуды полувольт ЭДС от целого и поврежденного полюсов;
ΔE_{nm}	- разность амплитуд ЭДС целого и поврежденного полюсов;
A_0	- величина нулевого члена ряда в относительных единицах;
$A_1 - A_3$	- амплитуды гармонических членов ряда в относительных единицах;
w_c	- число витков в обмотке полюса;
$k_{отс}$	- коэффициент отстройки;
f_1	- частота сети;
РЭ	- реагирующий элемент;
В1, В2	- выпрямители;
ФВЧ	- фильтр высоких частот для подавления постоянной составляющей;
ФНЧ1	- фильтр низких частот для выделения периодической составляющей частотой f_v ;
ФНЧ2	- фильтр низких частот для формирования величины

	входного сигнала на триггер Шмитта (ТШ);
ФНЧЗ	- фильтр низких частот, формирующий опорное напряжение (уставку);
ТШ	- неинвертирующий триггер Шмита;
$W_{\text{ФВЧ}}(s)$,	- передаточные функции ФВЧ и ФНЧ;
$W_{\text{ФНЧ}}(s)$	
$\tau_{\text{в.}j}, \tau_{\text{н.}j}$	- постоянные времени звеньев каскадов;
n, m	- количество каскадов ФВЧ и ФНЧ1 соответственно;
$f_{\text{в}}, f_{\text{н}}$	- граничные частоты полосы пропускания ФВЧ и ФНЧ1 фильтров;
$\Delta A_j, \Delta A_i$	- ослабление в каскадах ВЧ и НЧ фильтров;
K	- коэффициент усиления ПФ;
N_b, N_{ch}, N_k	порядок фильтров Баттерворта, Чебышева и эллиптического фильтра;
R_p	- уровень искажения сигнала в полосе пропускания;
R_s	- уровень подавления шума;
ω_0	- частота пропускания;
ω_1	- частота подавления;
arch	- гиперболический арккосинус;
K	- полный эллиптический интеграл;
K'	- комплементарный эллиптический интеграл;
$H(s)$	- передаточная функция;
s	- комплексная переменная;
a_i, b_i	- коэффициенты нулей и полюсов передаточной функции;
K_i	- коэффициент усиления;
a_i, b_i, c_i, c_0	- табличные значения параметров эллиптического фильтра;
АЧХ	- амплитудно-частотная характеристика;
A_1	- нижняя граница предельно допустимой неравномерности АЧХ в полосе пропускания;
A_2	- верхняя граница предельно допустимой неравномерности АЧХ в полосе подавления;
A_{max}	- максимальная амплитуда;
A_{min}	- амплитуда входного сигнала на нижней границе динамического диапазона;
b_D	- разрядность цифрового кода входного сигнала;
$A_{\text{ex min}}$	- минимальная амплитуда входного сигнала;
$R_{\text{ш}}^D$	- заданное отношение сигнал/шум на выходе;
$P_{\text{ш}}$	- мощность полного выходного шума;
$\rho(e_k)$	- плотность вероятности ошибки квантования e_k при округлении и усечении;

x	- величина шага квантования;
b_R	- разрядность цифрового кода входного сигналов;
$h(kT)$	- импульсная характеристика на входную последовательность;
Ψ_i, Ψ_j	- потокосцепления i -й секции статора и j -й катушки ротора с ДМП;
$\Psi_{i\delta}, \Psi_{j\delta}$	- потокосцепления поля воздушного зазора i -й секции статора и j -й катушки ротора с ДМП;
$X_s(t)$	- составляющая от токов статорной обмотки;
$X_f(t)$	- составляющая от токов роторной обмотки;
$\eta_s(t), \eta_f(t)$	- аддитивные шумовые составляющие от статорной и роторной обмотки;
$X_\delta(t)$	- составляющая от воздушного зазора;
$\varepsilon(t)$	- ошибки измерения
$Z_f(t)$	- функция полезного сигнала от возникновения виткового замыкания в обмотке ротора
$\mathbf{a}(t)$	- неизвестные ограниченные, однозначные функции времени t
$\xi_t, \boldsymbol{\eta}_t$	- случайные процессы, представляющие погрешности измерений сигнала;
\mathbf{r}	- вектор управляющих параметров, определяющих значимость (вес) дополнительных априорных данных $\bar{z}_{n,j}$;
$\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{r}, h)$	- объединенный вектор;
$\boldsymbol{\varphi}(t)$	- вектор известных функций;
$\boldsymbol{\alpha}(t)$	- вектор столбец неизвестных ограниченных функций;
\mathbf{y}^*	- вектор фактических значений сигнала;
$\bar{\mathbf{a}}_{t,j}$	- вектор дополнительных априорных сведений и экспертных оценок;
F_n	- матрица значений известных функций $\varphi_j(t)$ в моменты времени t_i ;
$W(\mathbf{r}_n)$	- диагональная матрица, определяющая значимость (вес) дополнительных априорных данных $\bar{\mathbf{a}}_n$;
$K_n(h_n)$	- диагональная матрица значений весовой функции;
$\gamma_{j,n}$	- параметр шага;
\mathbf{I}	- единичная диагональная матрица;
$\boldsymbol{\alpha}_0$	- вектор начальных оценок параметров соответствующий дополнительным априорным данным;
t_n, t_k	- временные границы локальной области изменения сигнала;
c_n	- значения коэффициентов ряда;

$l_n(t)$	- функции Лагерра;
α	- масштабный коэффициент;
C_n^j	- число сочетаний из n по j ;
$c1_k, c2_k$	- коэффициенты ряда для положительной и отрицательной полуволны;
K	- количество коэффициентов ряда;
\mathbf{x}	- вектор переменных состояний;
$i_d, i_q, i_f, i_{kd}, i_{kq}$	- мгновенные значения токов статора, ротора, демпферной обмотки в проекциях координат dq соответственно;
ω, δ	- угловая скорость и угол поворота ротора;
$\mathbf{A}(\mathbf{x})$	- матричная функция собственной динамики СГ;
\mathbf{u}	- вектор входных воздействий;
\mathbf{B}	- входная матрица;
\mathbf{y}	- вектор измеренных переменных;
$\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$	- матричная функция измерительной системы;
$u_d, u_q, u_f, u_{kd}, u_{kq}$	- мгновенные значения напряжений статора, ротора, демпферной обмотки в проекциях координат dq соответственно;
M_{mech}	- механический момент на валу СГ;
p, q	- значения активной и реактивной мощности СГ;
i	- мгновенное значение результирующего модуля вектора тока статора;
X_1, X_2, \dots, X_m	- входные сигналы нейрона;
W_1, W_2, \dots, W_m	- синаптические веса нейронов;
b	- сдвиг;
$F(S)$	- активационная функция;
Y	- выходной сигнал нейрона;
$j = \sqrt{-1}, e^{j2\pi/3}$	- пространственный сдвиг проекций вектора на ось в естественной системе координат;
$u_a(t), u_b(t), u_c(t)$	- источники напряжения фаз;
$i_a(t), i_b(t), i_c(t)$	- токи фаз;
L, R	- активно-индуктивная нагрузка;
ДТ1, ДТ2, ДТ3	- датчики токов фаз;
ДН1, ДН2, ДН3	- датчики напряжений фаз;
ПК	- преобразователи координат;
БРМ	- блок вычисления квазиреактивной мощности;
I_m	- амплитуда тока;
\mathbf{Y}	- вектор данных тренировочного набора;

M	- количество данных в тренировочном наборе;
Θ_{\min}	- радиус сжатия, показывающий минимально допустимое расстояние между двумя тренировочными наборами ДНС;
l_{ij}	- евклидово расстояние между векторами;
$m_{i1}, m_{i2}, \dots, m_{ik}$	- компоненты вектора M_i i -го столбца массива тренировочного набора;
$m_{j1}, m_{j2}, \dots, m_{jk}$	- компоненты вектора M_j j -го столбца массива тренировочного набора;
Θ_{\max}	- радиус сжатия, показывающий максимальное допустимое расстояние между двумя тренировочными наборами, обусловленное постоянными времени объекта наблюдения, в данном случае - синхронного генератора;
N	- число итераций;
ε_2	- заданное малое положительное число;
E	- единичная матрица;
μ^k	- последовательность положительных чисел;
ε_1	- заданное малое положительное число;
w_{1ji}	- синаптический вес i -го входа j -го нейрона первого скрытого слоя;
w_{1j0}	- сдвиг j -го нейрона первого скрытого слоя;
w_{2ji}	- синаптический вес i -го входа j -го нейрона второго скрытого слоя;
w_{2j0}	- сдвиг j -го нейрона второго скрытого слоя;
w_{3j}	- синаптический вес k -го входа нейрона выходного слоя;
w_{30}	- сдвиг нейрона выходного слоя;
x_i	- входные сигналы искусственной нейронной сети, равные соответственно;
ЭВЗ	- элемент временной задержки;
ПК	- преобразователь координат;
БОККРМ	блок определения коэффициента квазиреактивной мощности;
БДК	- блок деления на корень;
ПНА	- проекции напряжения альфа;
ПНБ	- вход проекции напряжения бета;
ПТА	- проекции тока альфа;
ПТБ	- проекции тока бета;
БУ	- блок умножения;
БСЗ	- блок смена знака;
С	- сумматор;
БУ	- блоку умножения;
X_v	- несимметрия магнитного поля;
X_f	- вибрация;

X_p	- отклонение регулировочной характеристики;
NB	- отрицательное большое (наличие устойчивых диагностических признаков значительного развития дефекта);
NM	- отрицательное среднее (наличие устойчивых диагностических признаков дефекта);
NS	- отрицательное малое (наличие диагностических признаков аварии на начальной стадии развития);
PS	- положительное малое (отклонение диагностических признаков на уровне допустимого);
PB	- положительное большое (все параметры на уровне нормативных);
F_i	- экспертная оценка достоверности существующего правила;
μ'	- функция принадлежности высказывания.

В монографии использованы традиционные для электротехнической литературы единицы измерения: А, В, Ом, Гн, Гц, МВт, м, мм, мм², об/мин.

ВВЕДЕНИЕ

Увеличение срока службы, единичной мощности и появляющиеся за время эксплуатации схемные и конструктивные усложнения вносят значительные затруднения в определение технического состояния электрических машин (ЭМ) при принятии решения по управлению, обслуживанию и ремонту. В тоже время в современных условиях к ЭМ, предъявляются все более высокие требования по надежности. Определение технического состояния ЭМ не является простой задачей, которую можно было бы решить путем проведения типовых профилактических испытаний. Специфической особенностью электроэнергетики является желательное устранение дефектов генерирующего оборудования в период плановых ремонтов. Вывод генератора во внеплановый ремонт наносит электрогенерирующей организации существенный экономический ущерб. Конечной целью технической диагностики является устранение дефекта. Вместе с тем необходимо учитывать, что только заблаговременное обнаружение дефекта до возможного отказа машины является главным аргументом, оправдывающим затраты на систему диагностики.

Скрытность причинно-следственных связей присуща практически всем видам дефектов электрооборудования, а выявление таких внутренних повреждений, как витковое замыкание (ВЗ), обрыв стержня в обмотке ротора ЭМ, является одной из трудных научных задач технической диагностики, поскольку нет диагностической информации, измеряемой штатными средствами, которая была бы однозначно связана с состоянием межвитковой изоляции. Научную задачу достоверного выявления витковых и двойных на землю замыканий в обмотке ротора синхронных машин неоднократно ставилась перед научным и инженерным сообществом на сессиях СИГРЭ, поскольку данный вид дефекта вызывает ряд негативных эффектов:

- неравномерность магнитного тяжения ротора, т.е. магнитную дисбалансировку и механические вибрации ротора;
- появление паразитных токов, протекающих через подшипники

скольжения, что резко снижает ресурс подшипников и масла;

– появление больших электрических потерь, которые негативно сказываются на механических и энергетических характеристиках;

– возникновение термического дисбаланса;

Еще сложнее обстоит дело с разработкой релейной защиты от внутренних повреждений в обмотке ротора ЭМ. Только в турбогенераторах до 160 МВт для защиты от замыканий на землю во второй точке используют переносной комплекс защиты, а защиты от внутренних повреждений не устанавливаются. Такое положение обусловлено как отсутствием теории, позволяющей разрабатывать простые и чувствительные устройства, способные выделить сигнал о возникновении повреждения межвитковой изоляции, так и традиционно принятой идеологией построения релейных защит ЭМ, основанной на использовании в качестве датчиков трансформаторы тока и напряжения.

Современное состояние развития вычислительной техники и её элементной базы создало предпосылки для разработки более совершенных устройств автоматики и релейной защиты, которые могут, сохраняя традиционные принципы действия защит, реализовывать новые алгоритмы защитно-диагностических систем, недостижимые для устройств на элементах аналоговой техники.

В этой связи создание высокоэффективной системы технической диагностики ЭМ, учитывающей особенности их конструкции и удовлетворяющей современным требованиям по техническим и экономическим показателям, эффективно работающих как автономно, так и в составе автоматизированных систем управления технологическими процессами (АСУ ТП), представляет собой актуальную научно-техническую проблему.

Без правильного понимания процессов, происходящих в электрической цепи невозможен адекватный анализ и разработка методов диагностирования внутренних повреждений ЭМ.

ГЛАВА 1. РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СИНХРОННЫХ МАШИН

1.1 Моделирование синхронной машины

Для анализа процессов в синхронной машине (СМ) при ВЗ в цепи ротора надо знать токи во всех обмотках машины как в нормальных эксплуатационных, так и в аварийных режимах работы.

Получение токов экспериментальным путем в аварийных и несимметричных режимах работы СМ технически затруднительно и экономически нецелесообразно. Необходимо создание математической модели, учитывающей особенности измерения параметров в реальных условиях и возможность расчета численными методами на компьютере.

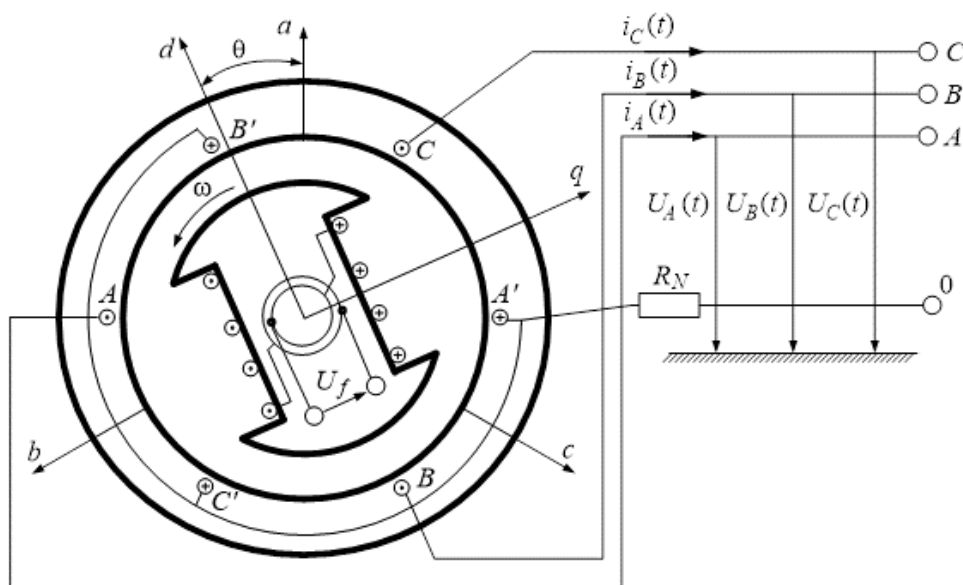


Рисунок 1 – Схема синхронной электрической машины

Для анализа работы СМ при витковых замыканиях целесообразно представлять модель в естественной системе координат. Зачастую токи в фазах статора СМ отличаются друг от друга как по амплитуде, так и по углу сдвига фаз. Это может быть связано не только с внутренней несимметрией машины, но и с несимметрией нагрузки. Модель должна достоверно отображать свойства СМ, позволять осуществлять переход от изображения к оригиналу и наоборот, а также быть наглядной, простой и доступной для изучения. С целью упрощения

ниже будут приведены основные выкладки для трехфазного синхронного генератора (СГ) без демпферных контуров.

Математическая модель СГ при витковом замыкании описывается следующими дифференциальными уравнениями равновесия потенциалов в контурах статора, ротора и замкнутого витка:

$$\begin{cases} \frac{d\Psi_A(t)}{dt} = -R_A \cdot i_A(t) - U_A(t) \\ \frac{d\Psi_B(t)}{dt} = -R_B \cdot i_B(t) - U_B(t) \\ \frac{d\Psi_C(t)}{dt} = -R_C \cdot i_C(t) - U_C(t) \\ \frac{d\Psi_f(t)}{dt} = -R_f \cdot i_f(t) - U_f(t) \\ \frac{d\Psi_{kd}(t)}{dt} = -R_{kd} \cdot i_{kd}(t), \end{cases} \quad (1)$$

где U_A, U_B, U_C, U_f – напряжения на выводах обмоток статора и ротора; $\Psi_A(t), \Psi_B(t), \Psi_C(t), i_A(t), i_B(t), i_C(t)$ – полные потокосцепления и токи обмоток фаз статора; $\Psi_f(t), i_f(t)$ – потокосцепление и ток обмотки возбуждения; $\Psi_{kd}(t), i_{kd}(t)$ – потокосцепление и токи замкнутых витков; $R_A, R_B, R_C, R_f, R_{kd}$ – приведенные сопротивления обмоток фаз статора, ротора и замкнутого витка.

Потокосцепления в соответствующих обмотках СГ имеют вид:

$$\begin{cases} \Psi_A(t) = L_A \cdot i_A(t) + M_{AB} \cdot i_B(t) + M_{AC} \cdot i_C(t) + M_{Af} \cdot i_f(t) + M_{Akd} \cdot i_{kd}(t) \\ \Psi_B(t) = L_B \cdot i_B(t) + M_{BA} \cdot i_A(t) + M_{BC} \cdot i_C(t) + M_{Bf} \cdot i_f(t) + M_{Bkd} \cdot i_{kd}(t) \\ \Psi_C(t) = L_C \cdot i_C(t) + M_{CA} \cdot i_A(t) + M_{CB} \cdot i_B(t) + M_{Cf} \cdot i_f(t) + M_{Ckd} \cdot i_{kd}(t) \\ \Psi_f(t) = L_f \cdot i_f(t) + M_{fA} \cdot i_A(t) + M_{fB} \cdot i_B(t) + M_{fC} \cdot i_C(t) + M_{fkd} \cdot i_{kd}(t) \\ \Psi_{kd}(t) = L_{kd} \cdot i_{kd}(t) + M_{kdA} \cdot i_A(t) + M_{kdB} \cdot i_B(t) + M_{kdC} \cdot i_C(t) + M_{kdf} \cdot i_f(t). \end{cases} \quad (2)$$

Индуктивности в обмотках фаз статора определяются выражениями:

$$\begin{cases} L_A = L_{m0} + L_{m2} \cos 2\alpha + L_{\sigma A} \\ L_B = L_{m0} + L_{m2} \cos 2\left(\alpha - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) + L_{\sigma B} \\ L_C = L_{m0} + L_{m2} \cos 2\left(\alpha + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) + L_{\sigma C}, \end{cases} \quad (3)$$

где $L_{m0} = \frac{L_{md} + L_{mq}}{2}$ – среднее значение индуктивности фаз; $L_{m2} = \frac{L_{md} - L_{mq}}{2}$

амплитуда по отношению к среднему значению; α – угол между продольной осью приведенной обмотки ротора и осью фазы А; L_{md}, L_{mq} – главные индуктивности фаз по продольным и поперечным осям; $L_{\sigma A}, L_{\sigma B}, L_{\sigma C}$ – индуктивности рассеяния фазных обмоток статора.

Главные индуктивности всех фаз обмоток по продольной и поперечной осям определяются экспериментально или по выражениям:

$$L_{md} = \frac{4 \cdot \mu_{01}}{p \cdot \pi^2} \cdot (w_1 \cdot k_{01})^2 \cdot \lambda_{ad}, L_{mq} = \frac{4 \cdot \mu_{01}}{p \cdot \pi^2} \cdot (w_1 \cdot k_{01})^2 \cdot \lambda_{aq}, \quad (4)$$

где $\lambda_{ad} = \frac{k_d \cdot \tau \cdot l_\delta}{k_\delta \cdot \delta}$ и $\lambda_{aq} = \frac{k_q \cdot \tau \cdot l_q}{k_\delta \cdot \delta}$ – коэффициенты проводимости зазора по продольной и поперечной осям; w_1 – число витков обмотки статора; k_{01} – обмоточный коэффициент обмотки статора; τ – полюсное деление; δ – величина воздушного зазора; k_δ – коэффициент Картера; l_δ – длина воздушного зазора.

Выражения для определения взаимных индуктивностей обмоток фаз статора имеют вид:

$$\begin{cases} M_{AB} = M_{BA} = -\frac{L_{m0}}{2} + L_{m2} \cdot \cos\left(2\alpha - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) + L_{\sigma AB} \\ M_{BC} = M_{CB} = -\frac{L_{m0}}{2} + L_{m2} \cdot \cos 2\alpha + L_{\sigma BC} \\ M_{CA} = M_{AC} = -\frac{L_{m0}}{2} + L_{m2} \cdot \cos\left(2\alpha + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) + L_{\sigma CA}, \end{cases} \quad (5)$$

где $L_{\sigma AB}, L_{\sigma BC}, L_{\sigma CA}$ – взаимная индуктивность рассеяния фазных обмоток.

Взаимные индуктивности между обмотками фаз статора и приведенной обмоткой возбуждения определяются выражениями:

$$\begin{cases} M_{Af} = \frac{3}{2} \cdot L_{md} \cdot \cos \alpha \\ M_{Bf} = \frac{3}{2} \cdot L_{md} \cdot \cos\left(\alpha - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \\ M_{Cf} = \frac{3}{2} \cdot L_{md} \cdot \cos\left(\alpha + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \end{cases}, \begin{cases} M_{fA} = L_{md} \cdot \cos \alpha \\ M_{fB} = L_{md} \cdot \cos\left(\alpha - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \\ M_{fC} = L_{md} \cdot \cos\left(\alpha + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right). \end{cases} \quad (6)$$

Взаимные индуктивности между обмотками фаз статора и замкнутым

ВИТКОМ ИМЕЮТ ВИД:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{Akd} = \frac{3}{2} \cdot L_{kd} \cdot \cos \alpha \\ M_{Bkd} = \frac{3}{2} \cdot L_{kd} \cdot \cos \left(\alpha - \frac{2 \cdot \pi}{3} \right) \\ M_{Ckd} = \frac{3}{2} \cdot L_{kd} \cdot \cos \left(\alpha + \frac{2 \cdot \pi}{3} \right) \end{array} \right., \left\{ \begin{array}{l} M_{kdA} = L_{kd} \cdot \cos \alpha \\ M_{kdB} = L_{kd} \cdot \cos \left(\alpha - \frac{2 \cdot \pi}{3} \right) \\ M_{kdC} = L_{kd} \cdot \cos \left(\alpha + \frac{2 \cdot \pi}{3} \right) \end{array} \right. \quad (7)$$

Взаимные индуктивности между обмоткой возбуждения и замкнутым витком определяются выражением:

$$M_{kdf} = M_{fkd} = \frac{3}{2} \cdot L_{kd} \quad (8)$$

Системы уравнений (1) и (2) образуют математическую модель в естественных координатах СГ с витковым замыканием.

1.2 Представление системы дифференциальных уравнений в

алгебраической форме с помощью билинейного преобразования

Разрешение системы уравнений (1) и (2) возможно лишь численными методами. Основным фактором, позволяющим получать асимптотически устойчивое решение системы дифференциальных уравнений, является правильный выбор шага интегрирования, который зависит от постоянных времени изучаемого объекта. Многие успешно используемые на практике явные численные методы требуют расчёта переменных состояния не только на полном шаге, но и на временных интервалах, составляющих доли полного шага. Этот фактор является одним из основных сдерживающих при применении классических явных численных методов для решения задачи Коши.

Сформулируем основные требования к перспективным дискретным математическим моделям, которые можно успешно реализовать на современных цифровых сигнальных процессорах:

– малый шаг дискретизации (от 100 до 50 мкс) при интегрировании системы дифференциальных уравнений с тем, чтобы на основной промышленной частоте 50 Гц на один период сетевого напряжения приходилось

от 100 до 400 точек замера;

– гарантированная асимптотическая устойчивость решения задачи Коши при выбранном шаге дискретизации;

– явный характер численных методов решения задачи Коши, то есть отсутствие необходимости на каждом шаге оптимизировать итерационную процедуру численного решения задачи Коши;

– допускается и даже приветствуется значительная предварительная работа, направленная на снижение вычислительных ресурсов цифровых сигнальных процессоров, затрачиваемых на обслуживание дискретной математической модели. Другими словами, какими бы сложными ни были аналитические выкладки по совершенствованию дискретной модели синхронной машины, проводимые до начала программно-алгоритмической реализации, если эти выкладки снизят нагрузку цифрового сигнального процессора, то эту предварительную работу необходимо проводить.

Авторы, изучив ряд опубликованных работ по явным численным методам решения задачи Коши, с учётом вышеуказанных замечаний пришли к убеждению, что выполнять построение дискретных моделей синхронной машины с витковым замыканием в обмотке ротора, пригодных для решения задач диагностики, практически реализуемых на современных цифровых сигнальных процессорах, предпочтительнее всего с использованием следующего подхода [1]:

– преобразование системы дифференциальных уравнений, описывающей динамическое состояние синхронной машины с замыканием в обмотке ротора, с переходом из пространства оригиналов в пространство изображений на основе одного из интегральных преобразований, например, преобразования Лапласа;

– применение к системе дифференциальных уравнений в изображениях математического преобразования, позволяющего получить изображение дискретной математической модели синхронной машины с шагом дискретизации, адаптированным под практическую реализацию на цифровом сигнальном процессоре;

– составление и адаптация итоговой системы разностных уравнений, на основе которых составляется программно-алгоритмическое обеспечение цифрового сигнального процессора.

Преобразуем систему дифференциальных уравнений (1), описывающую динамическое состояние синхронной машины с замыканием в обмотке ротора (рис. 2), с переходом из пространства оригиналов в пространство изображений на основе преобразования Лапласа:

$$\begin{cases} s \cdot \Psi_A(s) = -R_A \cdot i_A(s) - U_A(s) \\ s \cdot \Psi_B(s) = -R_B \cdot i_B(s) - U_B(s) \\ s \cdot \Psi_C(s) = -R_C \cdot i_C(s) - U_C(s) \\ s \cdot \Psi_f(s) = -R_f \cdot i_f(s) - U_f(s) \\ s \cdot \Psi_{kd}(s) = -R_{kd} \cdot i_{kd}(s) \end{cases} \quad (9)$$

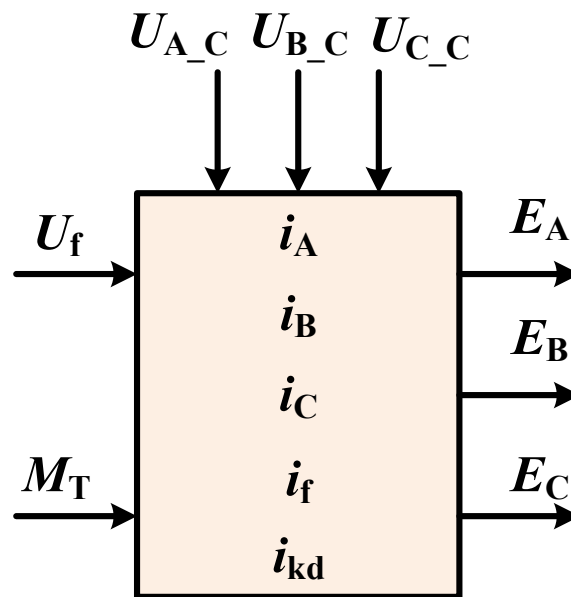


Рисунок 2 – Синхронная машина в пространстве состояний

Билинейное преобразование (Tustin's method transformation) связано с оператором Лапласа следующим соотношением $z = e^{sT}$, для перехода к линейным алгебраическим уравнениям необходимо разложить z в ряд Тейлора:

$$s = \frac{1}{T} \ln(z) = \frac{2}{T} \left[\frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^5 \right] \approx \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}.$$

С учетом $s \approx \frac{2}{T} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ переходим к z -изображениям дискретных

переменных состояния СГ:

$$\begin{cases} \Psi_A(z) \frac{2}{T} \cdot \frac{(1-z^{-1})}{1+z^{-1}} = -R_A \cdot i_A(z) - U_A(z) \\ \Psi_B(z) \frac{2}{T} \cdot \frac{(1-z^{-1})}{1+z^{-1}} = -R_B \cdot i_B(z) - U_B(z) \\ \Psi_C(z) \frac{2}{T} \cdot \frac{(1-z^{-1})}{1+z^{-1}} = -R_C \cdot i_C(z) - U_C(z) \\ \Psi_f(z) \frac{2}{T} \cdot \frac{(1-z^{-1})}{1+z^{-1}} = -R_f \cdot i_f(z) - U_f(z) \\ \Psi_{kd}(z) \frac{2}{T} \cdot \frac{(1-z^{-1})}{1+z^{-1}} = -R_{kd} \cdot i_{kd}(z). \end{cases} \quad (10)$$

Преобразуем систему уравнений (10) к виду:

$$\begin{cases} U_A(z) = -R_A \cdot i_A \cdot (1+z^{-1}) - \Psi_A \frac{2}{T} \cdot (1-z^{-1}) - U_A \cdot z^{-1} \\ U_B(z) = -R_B \cdot i_B \cdot (1+z^{-1}) - \Psi_B \frac{2}{T} \cdot (1-z^{-1}) - U_B \cdot z^{-1} \\ U_C(z) = -R_C \cdot i_C \cdot (1+z^{-1}) - \Psi_C \frac{2}{T} \cdot (1-z^{-1}) - U_C \cdot z^{-1} \\ i_f(z) = -U_f \frac{1}{R_f} \cdot (1+z^{-1}) - \Psi_f \frac{2}{T} (1-z^{-1}) \cdot \frac{1}{R_f} - i_f \cdot z^{-1} \\ i_{kd}(z) = -\Psi_{kd} \frac{2}{T \cdot R_{kd}} (1-z^{-1}) - i_{kd} \cdot z^{-1}. \end{cases} \quad (11)$$

Переходим от изображений дискретных переменных состояния к оригиналам, то есть к конечным последовательностям:

$$\begin{cases} U_A(k) = -R_A \cdot (i_A(k) + i_A(k-1)) - \frac{2}{T} \cdot (\Psi_A(k) - \Psi_A(k-1)) - U_A(k-1) \\ U_B(k) = -R_B \cdot (i_B(k) + i_B(k-1)) - \frac{2}{T} \cdot (\Psi_B(k) - \Psi_B(k-1)) - U_B(k-1) \\ U_C(k) = -R_C \cdot (i_C(k) + i_C(k-1)) - \frac{2}{T} \cdot (\Psi_C(k) - \Psi_C(k-1)) - U_C(k-1) \\ i_f(k) = -\frac{1}{R_f} \cdot (U_f(k) + U_f(k-1)) - \frac{2}{T} (\Psi_f(k) - \Psi_f(k-1)) \cdot \frac{1}{R_f} - i_f(k-1) \\ i_{kd}(k) = -\frac{2}{T \cdot R_{kd}} (\Psi_{kd}(k) - \Psi_{kd}(k-1)) - i_{kd}(k-1). \end{cases} \quad (12)$$

Подставим в систему линейных алгебраических уравнений (12)

выражения потокосцеплений с задержкой на один такт:

$$\begin{cases}
 U_A(k) = \left(-R_A - \frac{2L_A}{T}\right) \cdot i_A(k) - \frac{2M_{AB}}{T} \cdot i_B(k) - \frac{2M_{AC}}{T} i_C(k) - \frac{2M_{Af}}{T} i_f(k) - \\
 - \frac{2M_{Akd}}{T} i_{kd}(k) + \left(-R_A + \frac{2L_A}{T}\right) i_A(k-1) + \frac{2M_{AB}}{T} i_B(k-1) + \frac{2M_{AC}}{T} i_C(k-1) \\
 + \frac{2M_{Af}}{T} i_f(k-1) + \frac{2M_{Akd}}{T} i_{kd}(k-1) - U_A(k-1) \\
 U_B(k) = -\frac{2M_{BA}}{T} i_A(k) + \left(-R_B - \frac{2L_B}{T}\right) i_B(k) - \frac{2M_{BC}}{T} i_C(k) - \frac{2M_{Bf}}{T} i_f(k) - \\
 - \frac{2M_{Bkd}}{T} i_{kd}(k) + \frac{2M_{BA}}{T} i_A(k) + \left(-R_B + \frac{2L_B}{T}\right) i_B(k-1) + \frac{2M_{BC}}{T} i_C(k-1) + \\
 \frac{2M_{Bf}}{T} i_f(k-1) + \frac{2M_{Bkd}}{T} i_{kd}(k-1) - U_B(k-1) \\
 U_C(k) = -\frac{2M_{CA}}{T} i_A(k) - \frac{2M_{CB}}{T} i_B(k) + \left(-R_C - \frac{2L_C}{T}\right) i_C(k) - \frac{2M_{Cf}}{T} i_f(k) - \\
 - \frac{2M_{Ckd}}{T} i_{kd}(k) + \frac{2M_{CA}}{T} i_A(k-1) + \frac{2M_{CB}}{T} i_B(k-1) + \left(-R_C + \frac{2L_C}{T}\right) i_C(k-1) + \\
 + \frac{2M_{Cf}}{T} i_f(k-1) + \frac{2M_{Ckd}}{T} i_{kd}(k-1) - U_C(k-1) \\
 U_f(k) = -\frac{2M_{fA}}{T} i_A(k) - \frac{2M_{fB}}{T} i_B(k) - \frac{2M_{fC}}{T} i_C(k) + \left(-R_f - \frac{2L_f}{T}\right) i_f(k) - \\
 - \frac{2M_{fkd}}{T} i_{kd}(k) + \frac{2M_{fA}}{T} i_A(k-1) + \frac{2M_{fB}}{T} i_B(k-1) + \frac{2M_{fC}}{T} i_C(k-1) + \\
 + \left(-R_f + \frac{2L_f}{T}\right) i_f(k-1) + \frac{2M_{fkd}}{T} i_{kd}(k-1) - U_f(k-1) \\
 0 = -\frac{2M_{kdA}}{T} i_A(k) - \frac{2M_{kdB}}{T} i_B(k) - \frac{2M_{kdC}}{T} i_C(k) + \frac{2M_{kdf}}{T} i_f(k) + \\
 + \left(-R_{kd} - \frac{2L_{kd}}{T}\right) i_{kd}(k) + \frac{2M_{kdA}}{T} i_A(k-1) + \frac{2M_{kdB}}{T} i_B(k-1) + \frac{2M_{kdC}}{T} i_C(k-1) + \\
 + \frac{2M_{kdf}}{T} i_f(k-1) + \left(-R_{kd} + \frac{2L_{kd}}{T \cdot R_{kd}}\right) i_{kd}(k-1).
 \end{cases} \quad (13)$$

На рис. 3 приведена структурная схема дискретной модели синхронной машины, созданной на базе (13).

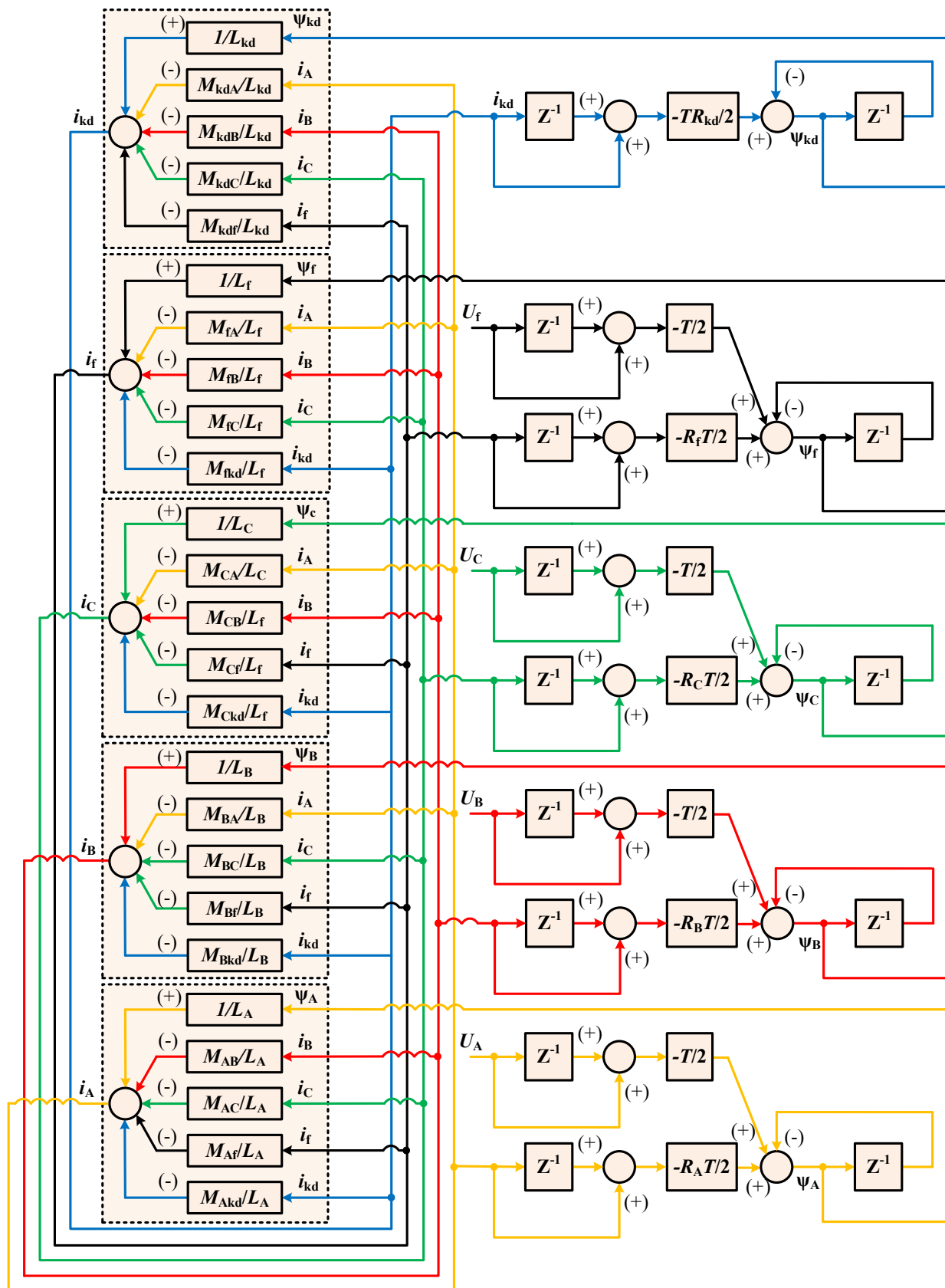


Рисунок 3 – Структурная схема дискретной модели синхронной машины

Полученную систему (13) можно преобразовать к матричному виду:

$$\begin{bmatrix} U_A(k) \\ U_B(k) \\ U_C(k) \\ U_f(k) \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{A}(k) \begin{bmatrix} i_A(k) \\ i_B(k) \\ i_C(k) \\ i_f(k) \\ i_{kd}(k) \end{bmatrix} + \mathbf{B}(k-1) \begin{bmatrix} i_A(k-1) \\ i_B(k-1) \\ i_C(k-1) \\ i_f(k-1) \\ i_{kd}(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_A(k-1) \\ U_B(k-1) \\ U_C(k-1) \\ U_f(k-1) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -R_A - \frac{2L_A}{T} & -\frac{2M_{AB}}{T} & -\frac{2M_{AC}}{T} & -\frac{2M_{Af}}{T} & -\frac{2M_{Akd}}{T} \\ -\frac{2M_{BA}}{T} & -R_B - \frac{2L_B}{T} & -\frac{2M_{BC}}{T} & -\frac{2M_{Bf}}{T} & -\frac{2M_{Bkd}}{T} \\ -\frac{2M_{CA}}{T} & -\frac{2M_{CB}}{T} & -R_C - \frac{2L_C}{T} & -\frac{2M_{Cf}}{T} & -\frac{2M_{Ckd}}{T} \\ -\frac{2M_{fA}}{T} & -\frac{2M_{fB}}{T} & -\frac{2M_{fC}}{T} & -R_f - \frac{2L_f}{T} & -\frac{2M_{fkd}}{T} \\ -\frac{2M_{kda}}{T} & -\frac{2M_{kdb}}{T} & -\frac{2M_{kdc}}{T} & -\frac{2M_{kdf}}{T} & -R_{kd} - \frac{2L_{kd}}{T} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}(k) = \begin{bmatrix} A_{00}(k) & A_{01}(k) & A_{02}(k) & A_{03}(k) & A_{04}(k) \\ A_{10}(k) & A_{11}(k) & A_{12}(k) & A_{13}(k) & A_{14}(k) \\ A_{20}(k) & A_{21}(k) & A_{22}(k) & A_{23}(k) & A_{24}(k) \\ A_{30}(k) & A_{31}(k) & A_{32}(k) & A_{33}(k) & A_{34}(k) \\ A_{40}(k) & A_{41}(k) & A_{42}(k) & A_{43}(k) & A_{44}(k) \end{bmatrix}$$

$$A_{00}(k) = -R_A - \frac{2L_A(k)}{T}; A_{01}(k) = -\frac{2M_{AB}(k)}{T}; A_{02}(k) = -\frac{2M_{AC}(k)}{T};$$

$$A_{03}(k) = -\frac{2M_{Af}(k)}{T}; A_{04}(k) = -\frac{2M_{Akd}(k)}{T};$$

$$A_{10}(k) = -\frac{2M_{BA}(k)}{T}; A_{11}(k) = -R_B - \frac{2L_B(k)}{T}; A_{12}(k) = -\frac{2M_{BC}(k)}{T};$$

$$A_{13}(k) = -\frac{2M_{Bf}(k)}{T}; A_{14}(k) = -\frac{2M_{Bkd}(k)}{T};$$

$$A_{20}(k) = -\frac{2M_{CA}(k)}{T}; A_{21}(k) = -\frac{2M_{CB}(k)}{T}; A_{22}(k) = -R_f - \frac{2L_f(k)}{T};$$

$$A_{23}(k) = -\frac{2M_{Cf}(k)}{T}; A_{24}(k) = -\frac{2M_{Ckd}(k)}{T};$$

$$A_{30}(k) = -\frac{2M_{fA}(k)}{T}; A_{31}(k) = -\frac{2M_{fB}(k)}{T}; A_{32}(k) = -\frac{2M_{fC}(k)}{T};$$

$$A_{33}(k) = -R_f - \frac{2L_f(k)}{T}; A_{34}(k) = -\frac{2M_{fkd}(k)}{T};$$

$$A_{40}(k) = -\frac{2M_{kdA}(k)}{T}; A_{41}(k) = -\frac{2M_{kdB}(k)}{T}; A_{42}(k) = -\frac{2M_{kdC}(k)}{T}; A_{43}(k) = -\frac{2M_{kdf}(k)}{T};$$

$$A_{44}(k) = -R_{kd} - \frac{2L_{kd}(k)}{T}.$$

$$\mathbf{B}(k-1) = \begin{bmatrix} B_{00}(k-1) & B_{01}(k-1) & B_{02}(k-1) & B_{03}(k-1) & B_{04}(k-1) \\ B_{10}(k-1) & B_{11}(k-1) & B_{12}(k-1) & B_{13}(k-1) & B_{14}(k-1) \\ B_{20}(k-1) & B_{21}(k-1) & B_{22}(k-1) & B_{23}(k-1) & B_{24}(k-1) \\ B_{30}(k-1) & B_{31}(k-1) & B_{32}(k-1) & B_{33}(k-1) & B_{34}(k-1) \\ B_{40}(k-1) & B_{41}(k-1) & B_{42}(k-1) & B_{43}(k-1) & B_{44}(k-1) \end{bmatrix};$$

$$B_{00}(k-1) = -R_A + \frac{2L_A(k-1)}{T}; B_{01}(k-1) = \frac{2M_{AB}(k-1)}{T}; B_{02}(k-1) = \frac{2M_{AC}(k-1)}{T};$$

$$B_{03}(k-1) = \frac{2M_{Af}(k-1)}{T}; B_{04}(k-1) = \frac{2M_{Akd}(k-1)}{T};$$

$$B_{10}(k-1) = \frac{2M_{BA}(k-1)}{T}; B_{11}(k-1) = -R_B + \frac{2L_B(k-1)}{T}; B_{12}(k-1) = \frac{2M_{BC}(k-1)}{T};$$

$$B_{13}(k-1) = \frac{2M_{Bf}(k-1)}{T}; B_{14}(k-1) = \frac{2M_{Bkd}(k-1)}{T};$$

$$B_{20}(k-1) = \frac{2M_{CA}(k-1)}{T}; B_{21}(k-1) = \frac{2M_{CB}(k-1)}{T}; B_{22}(k-1) = -R_C + \frac{2L_C(k-1)}{T};$$

$$B_{23}(k-1) = \frac{2M_{Cf}(k-1)}{T}; B_{24}(k-1) = \frac{2M_{Ckd}(k-1)}{T};$$

$$B_{30}(k-1) = \frac{2M_{fA}(k-1)}{T}; B_{31}(k-1) = \frac{2M_{fB}(k-1)}{T}; B_{32}(k-1) = \frac{2M_{fC}(k-1)}{T};$$

$$B_{33}(k-1) = -R_f + \frac{2L_f(k-1)}{T}; B_{34}(k-1) = \frac{2M_{fkd}(k-1)}{T};$$

$$B_{40}(k-1) = \frac{2M_{kdA}(k-1)}{T}; B_{41}(k-1) = \frac{2M_{kdB}(k-1)}{T}; B_{42}(k-1) = \frac{2M_{kdC}(k-1)}{T};$$

$$B_{43}(k-1) = \frac{2M_{kdf}(k-1)}{T}; B_{44}(k-1) = -R_{kd} + \frac{2L_{kd}(k-1)}{T}.$$

Преобразуем систему алгебраических уравнений (14) к виду (15) путем

перемножения левой и правой части на \mathbf{A}^{-1} :

$$\mathbf{i}(k) = \mathbf{A}^{-1}(k) \cdot \mathbf{B}(k-1) \cdot \mathbf{i}(k-1) + \mathbf{A}^{-1}(k) \cdot (\mathbf{U}(k-1) + \mathbf{U}(k)), \quad (15)$$

где $\mathbf{i}(k) = \begin{bmatrix} i_A(k) \\ i_B(k) \\ i_C(k) \\ i_f(k) \\ i_{kd}(k) \end{bmatrix}; \mathbf{U}(k) = \begin{bmatrix} U_A(k) \\ U_B(k) \\ U_C(k) \\ U_f(k) \\ 0 \end{bmatrix}.$

На рис. 4 показана структурная схема, иллюстрирующая матричную форму уравнений (14). Выводы и определение элементов для аналитического решения уравнения (15) приведены в Приложении.

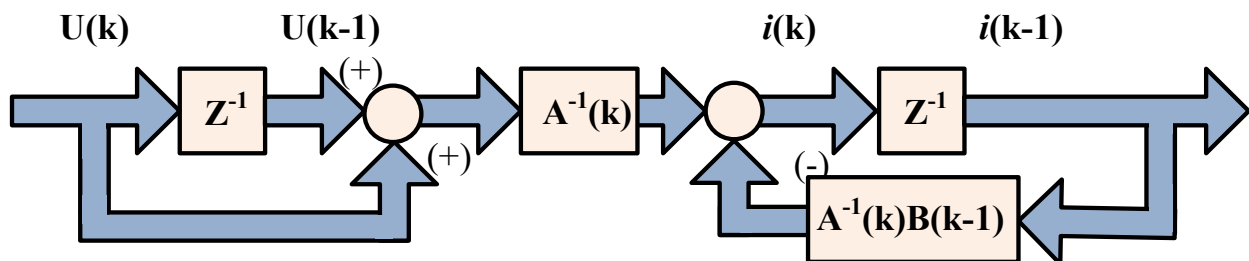


Рисунок 4 – Иллюстрация структурной схемы модели СМ в матричном виде

После определения времени начала расчета и начальных условий на момент времени на основе модели (рис. 3), были рассчитаны токи в обмотках СГ ГАБ-4-Т/230 при трехфазном коротком замыкании (КЗ) (в момент КЗ напряжения на выводах приравнивались к нулю). На рис. 5 а, б приведены результаты моделирования и экспериментальные кривые токов (фазы А и ротора) при трехфазном КЗ. Погрешность расчета токов по амплитуде не превышает 7 %, что говорит о корректности модели.

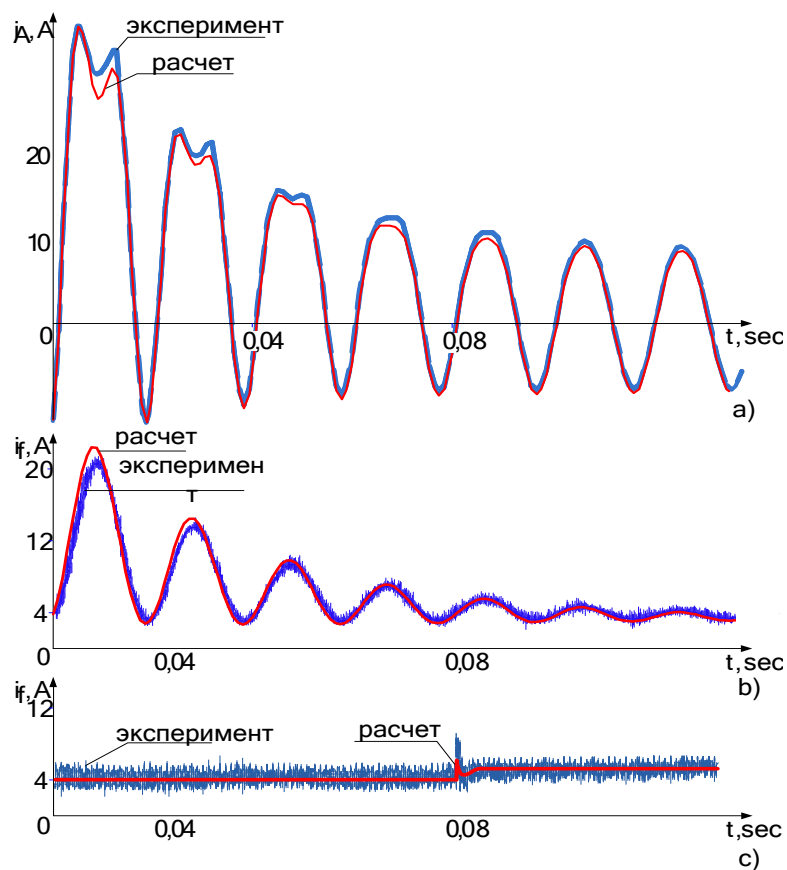


Рисунок 5 – Моделирование токов СГ ГАБ-4-Т/230 при трехфазном КЗ

Моделирование работы СГ при межвитковом замыкании в обмотке ротора (рис. 5, с) производилось аналогично расчету для неповрежденного СГ по формуле (14), но матрицы индуктивностей L и активных сопротивлений R при этом видоизменяются. При возникновении ВЗ в обмотке ротора возникает еще один короткозамкнутый контур и размерность всех матриц увеличивается на единицу.

Время переходного процесса при расчете и на осциллограмме практически одинаково, качественно расчетные и снятые экспериментально токи близки.

1.3 Моделирование магнитных полей рассеяния от обмоток статора и ротора в торцевой зоне

Разработка новых методов функциональной диагностики СГ на предмет выявления внутренних электрических повреждений требует использования не только новых принципов ее построения, но и дополнительных источников

информации. Одним из перспективных направлений является анализ магнитной несимметрии машины. Диагностический сигнал с преобразователей магнитного поля обладает высокой чувствительностью к внутренним повреждениям, но ввиду конструктивных особенностей СГ в нем не проявляется несимметрия питающей сети. Анализ магнитной несимметрии СГ основан на моделировании магнитных полей в торцевой зоне машин.

Величина и форма ЭДС на выходе ДМП определена из распределения магнитного поля в торцевой зоне СГ. Поэтому для расчета параметров этой ЭДС по известным токам в статоре и роторе в эксплуатационных и аварийных режимах работы автором разработан простой и надежный метод моделирования магнитных полей в торцевой зоне СГ, основанный на использовании метода зеркальных отражений [2].

На рис. 6, а, приведена конструкция торцевой зоны синхронного генератора, а на рис 6, б, схематично показаны основные элементы конструкции торцевой зоны СГ и их взаимное расположение.

Если не учитывать вентиляционные каналы (3), воздушный зазор (5), выступы газового канала (11) и вентиляторный узел (12), (рис. 6, а) и развернуть машину в тангенциальном направлении, то моделирование магнитных полей в такой зоне сводится к решению классической задачи о нахождении распределения магнитного поля проводника с током в бесконечном призматическом ферромагнитном канале.

Для моделирования магнитных полей предлагается использовать метод зеркальных отражений. Однако результаты расчета индукции магнитного поля по этому методу не удовлетворяют граничным условиям из-за несимметричности токов, в связи с этим необходима коррекция величин токов отражений, учитывающая как магнитную проницаемость стенок канала, так и местоположение расчетной точки между параллельными стенками призматического канала.

Расчетная схема призматического канала шириной T и высотой H приведена на рис. 7, где изображено по одному отражению в каждую сторону.

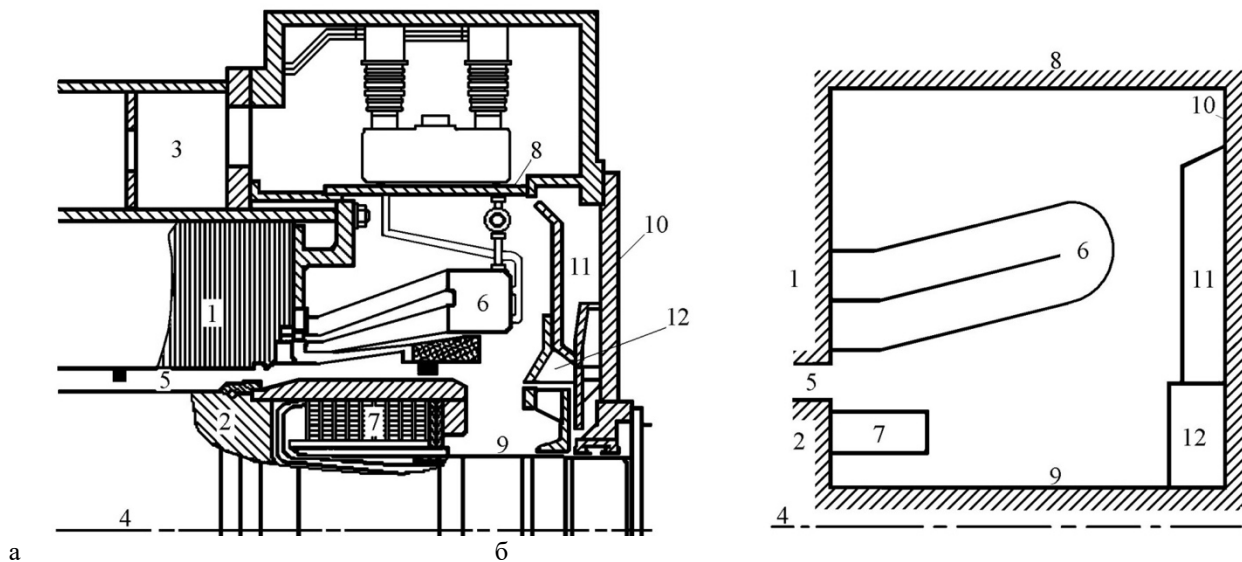


Рисунок 6 – Конструкция торцевой зоны турбогенератора ТВВ-500-2ЕУЗ:
 1 – сердечник статора; 2 – сердечник ротора; 3 – вентиляционные каналы;
 4 – ось вращения ротора; 5 – воздушный зазор; 6 – лобовая часть обмотки статора; 7 – лобовая часть обмотки ротора; 8 – кожух; 9 – вал; 10 – торцевой щит; 11 – выступы газового канала; 12 – вентиляторный узел

Начало координат совмещено с левым нижним углом расчетной зоны.

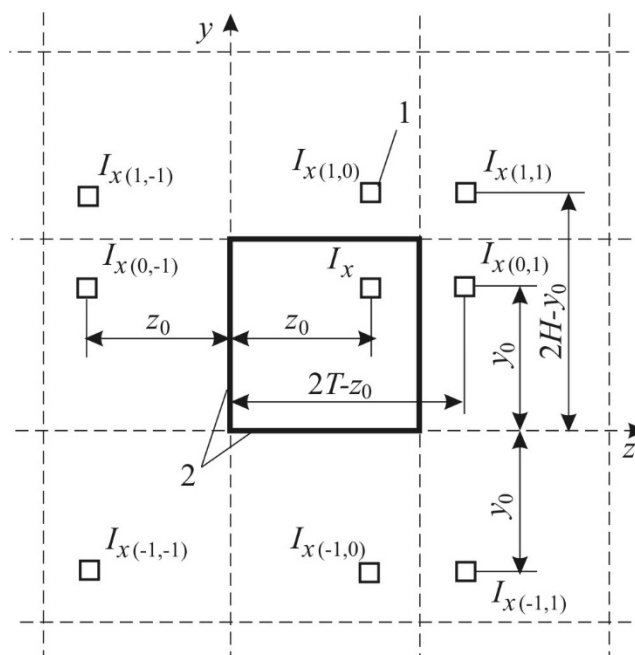


Рисунок 7 – Расчетная схема призматического ферромагнитного канала:
 1 – проводники с током; 2 – ферромагнитные стенки призматического канала

Расчет поля проводника с током, расположенного между параллельными ферромагнитными поверхностями, выполняется бесконечным числом отражений. По закону Био-Савара-Лапласа для i и j -го отражения проводника с током $I_{x(i,j)}$ вдоль осей y и x соответственно индукция магнитного поля в плоскости, перпендикулярной проводнику, определяется выражением:

$$B_{y(i,j)} = \frac{I_{x(i,j)}\mu_0|z - z_j|}{2\pi b_{x(i,j)}} \frac{l_x K_y}{2d_{x(i,j)}}; \quad B_{z(i,k)} = \frac{I_{x(i,j)}\mu_0|y - y_i|}{2\pi b_{x(i,j)}} \frac{l_x K_z}{2d_{x(i,j)}};$$

$$b_{x(i,j)} = \sqrt{(y_i - y)^2 + (z_j - z)^2}; \quad d_{x(i,k)} = \sqrt{l_x^2 + b_{x(i,j)}^2},$$

где y_i, z_j – координаты i, j -го отражения проводника; μ_0 – относительная магнитная проницаемость; y, z – координаты точки, в которой определяются аксиальная $B_z(i,j)$ и радиальная $B_y(i,j)$ составляющие индукции магнитного поля отражений; l_x – длина проводника, вдоль которого и разворачивается машина; K_y, K_z – коэффициенты коррекции; b_x – расстояние от точки расчета индукции до центра проводника; d_x – расстояние от точки расчета индукции до конца проводника.

В точке с координатами y и z радиальная и аксиальная индукция определяются как:

$$B_y = \sum_i \sum_k B_{y(i,j)}; \quad B_z = \sum_i \sum_k B_{z(i,j)}.$$

Если принять, что магнитная проницаемость ферромагнитных элементов равна бесконечности, то величина тока для любого отражения:

$$I_{x(i,j)} = I_x.$$

Если магнитная проницаемость не равна бесконечности, то величина тока для i, j -го отражения равна:

$$I_{x(i,j)} = I_x \left(\frac{\mu_c - 1}{\mu_c + 1} \right)^{i+j},$$

где μ_c – магнитная проницаемость ферромагнитных элементов.

При расчете B_z в областях $0 < y < y_0$ и $y_0 < y < H$ (рис.2.7) коэффициент коррекции определяется как:

$$K_z = \frac{y}{0,5H} \text{ и } K_z = \frac{H-y}{0,5H}.$$

Если в системе координат ферромагнитные поверхности параллельны оси z , то для расчета составляющей индукции магнитного поля B_y в областях $0 < z < z_0$ и $z_0 < z < T$ коэффициент коррекции:

$$K_y = \frac{z}{0,5T} \text{ и } K_y = \frac{T-z}{0,5T}.$$

В реальных условиях магнитная проницаемость ферромагнитных стенок в электрических машинах имеет конечную величину и колеблется в пределах 40...1400. В этом случае при расчете B_z в областях $0 < y < y_0$ и $y_0 < y < H$ следует применять коэффициенты коррекции, рассчитанные следующими уравнениями:

$$K_z = \frac{y}{0,5H} (1 + K_c) - K_c \text{ и } K_z = \frac{H-y}{0,5H} (1 + K_c) - K_c,$$

где $K_c = e^{\mu p}$, а $p \approx -0,00264$.

Расчет составляющей индукции магнитного поля B_y в областях $0 < z < z_0$ и $z_0 < z < T$ соответственно осуществляется с коэффициентами коррекции:

$$K_y = \frac{z}{0,5T} (1 + K_c) - K_c \text{ и } K_y = \frac{T-z}{0,5T} (1 + K_c) - K_c.$$

Вышеизложенный метод разработан для проводника в бесконечном ферромагнитном канале. Для моделирования магнитного поля секции статора и катушки ротора необходима другая система расположения проводников с током. Поскольку лобовые части обмоток различны по конфигурации, то основой моделирования поля может служить пара симметричных проводников с согласованным направлением токов.

Для СГ наиболее характерна секционированная обмотка статора. Лобовую часть ее секции можно считать симметричной в плоскости x и y , если допустить, что координаты y верхней и нижней ветвей равны. Тогда в расчетах ее лобовую часть представляют в виде нескольких пар элементов, тангенциальная составляющая токов в которых совпадает по направлению. На рис. 8, а, показана секция статора, представленная в виде четырех пар элементов.

При моделировании полей лобового рассеяния неявнополюсного ротора

лобовую часть каждой из катушек представляют также в виде пары проводников с током. На рис. 8, б, в качестве примера показан полюс, состоящий из четырех катушек.

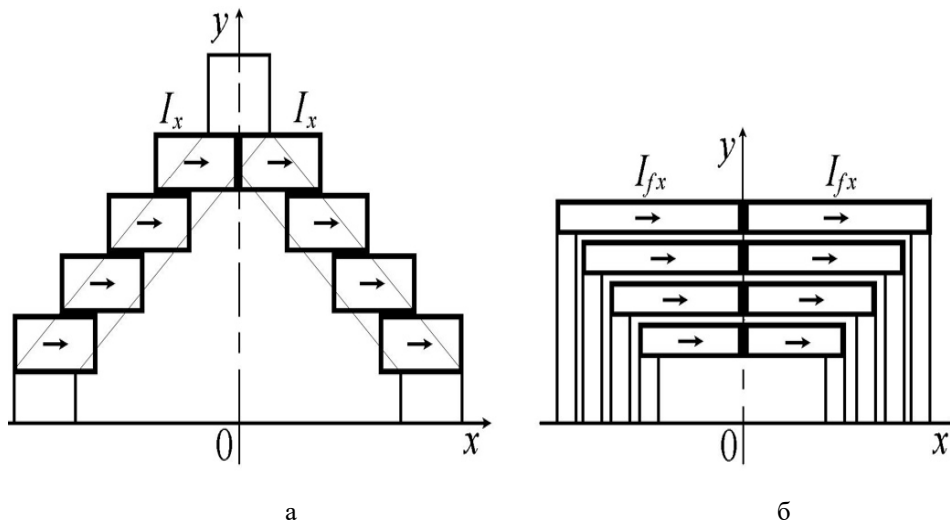


Рисунок 8 – Представление лобовой части секции статора и неявнополюсного ротора парами элементов (выделены толстой линией), а также направление аксиальной составляющей токов в них

В явнополюсных СМ полюс выполнен в виде одной катушки и заменяется одной парой проводников.

Для моделирования магнитного поля пары симметричных элементов с током I_x используется расчетная схема (рис. 9).

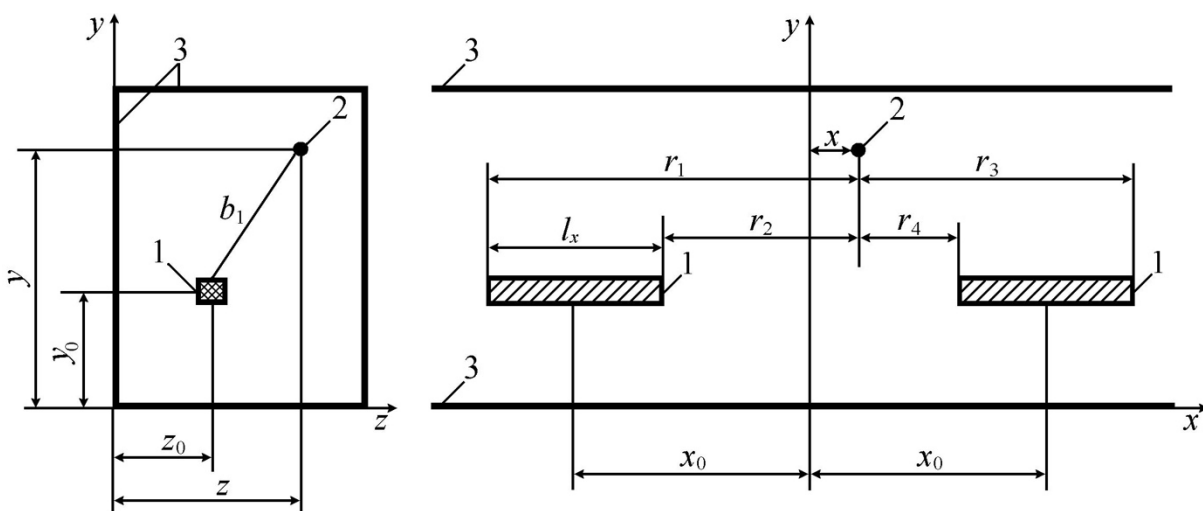


Рисунок 9 – Расчетная схема призматического канала с парой симметричных проводников 1 – проводники; 2 – точка расчета; 3 – ферромагнитные стенки

Если тангенциальная составляющая токов пары симметричных проводников совпадает по направлению, то радиальная и аксиальная составляющие индукции магнитного поля i, j -го отражения с учетом вычисляется по формулам:

$$B_{y(i,j)} = \frac{I_{x(i,j)} \mu_0}{4\pi b_{1(i,j)}} \left(\frac{r_1}{d_{1(i,j)}} - \frac{r_2}{d_{2(i,j)}} + \frac{r_3}{d_{3(i,j)}} - \frac{r_4}{d_{4(i,j)}} \right) \frac{z_j K_y}{b_{1(i,j)}};$$

$$B_{z(i,j)} = \frac{I_{x(i,j)} \mu_0}{4\pi b_{1(i,j)}} \left(\frac{r_1}{d_{1(i,j)}} - \frac{r_2}{d_{2(i,j)}} + \frac{r_3}{d_{3(i,j)}} - \frac{r_4}{d_{4(i,j)}} \right) \frac{y_i K_z}{b_{1(i,j)}},$$

где $b_{1(i,j)} = \sqrt{(y_i - y)^2 + (z_i - z)^2}$; $d_{1(i,j)} = \sqrt{r_1^2 + b_{1(i,j)}^2}$; $d_{2(i,j)} = \sqrt{r_2^2 + b_{1(i,j)}^2}$;

$$r_1 = x_0 + \frac{l_x}{2} + x; \quad d_{3(i,j)} = \sqrt{r_3^2 + b_{1(i,j)}^2}; \quad d_{4(i,j)} = \sqrt{r_4^2 + b_{1(i,j)}^2}; \quad r_2 = x_0 - \frac{l_x}{2} + x$$

$$r_3 = x_0 + \frac{l_x}{2} - x; \quad r_4 = x_0 - \frac{l_x}{2} - x.$$

Моделирование магнитного поля лобового рассеяния обмотки статора СМ в эксплуатационных режимах работы при симметричной и несимметричной нагрузке осуществляется следующим образом. Первоначально моделируется магнитное поле одного витка секции статора с током $I_{st} = 1$ А. При этом размеры проводника должны соответствовать размерам секции статора СГ в изоляции.

В расчетах считают секцию симметричной в плоскости x и y . В ней выделяют только отогнутую часть, так как именно она несет тангенциальную составляющую тока. При расчете магнитного поля ось симметрии лобовой части витка секции совмещается с началом координат, как показано на рис. 10. Его отогнутая часть разбивается на K пар симметричных относительно оси элементов длиной l_x и l_k вдоль оси x . Одна такая пара элементов на рис. 10 выделена. В расчетах следует принимать $K=4\dots 8$. Если $K<4$, то недопустимо снижается точность расчета. При $K>8$ из-за принятых допущений точность не повышается.

Размеры и место расположения k -ой пары элементов, согласно схеме расчета (рис.5), определяются по формулам:

$$l_{x1k} = \beta\tau / 2K; \quad x_{01k} = \frac{\beta\tau}{2K}(k - 0,5); \quad y_{01k} = h_{11} + \frac{(h_{12} - h_{12})}{K};$$

$$z_{01k} = t_{11} + \frac{(t_{21} - t_{11})}{K}(k - 0,5),$$

где τ – полюсное деление; β – коэффициент укорочения обмотки статора.

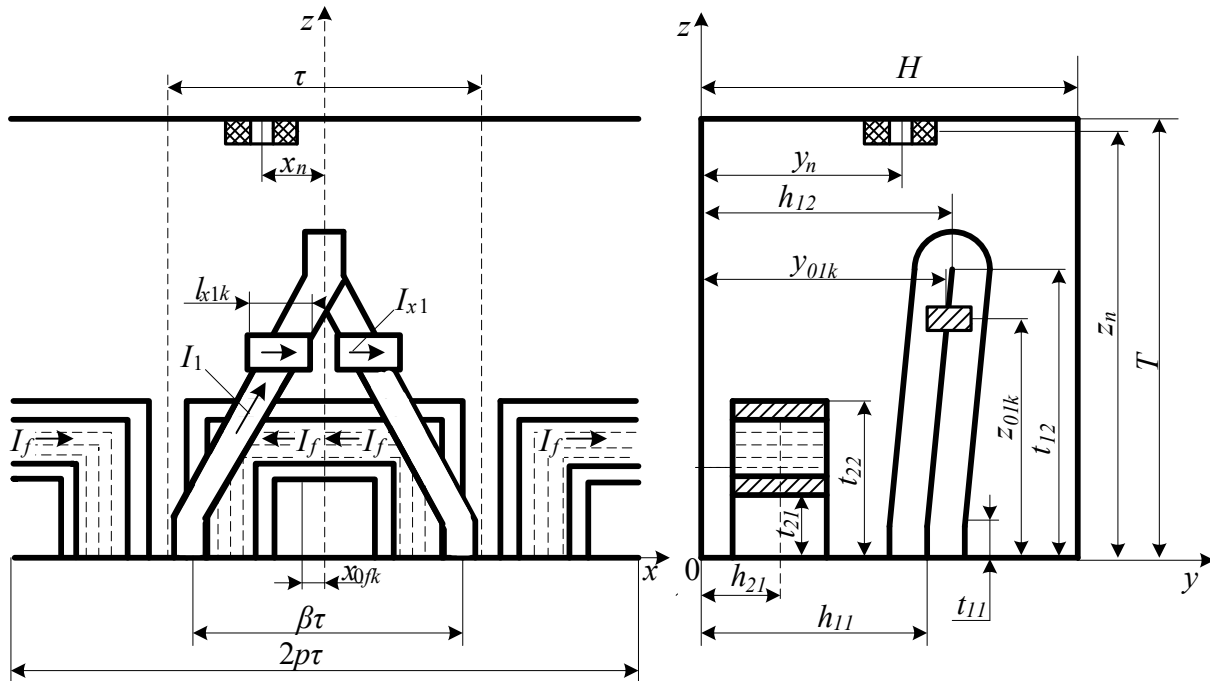


Рисунок 10 – Схема для расчета полей секции статора и полюса ротора

В результате радиальная и аксиальная составляющие индукции магнитного поля отогнутой части от K пар элементов лобовой части витка секции:

$$B_{y1,v}(x) = \sum B_{y1,k}(x); \quad B_{z1,v}(x) = \sum B_{z1,k}(x),$$

где $B_{y1,k}(x)$ и $B_{z1,k}(x)$ – распределение радиальной и аксиальной составляющих индукции магнитного поля от k -й пары элементов лобовой части витка секции.

Распределение аксиальной составляющей индукции лобового рассеяния от секции обмотки статора генератора ТВВ-500-2ЕУЗ вдоль его развертки длиной $2p\tau$ и координатах измерения $y=0,6$ м и $z=1,005$ м приведено на рис. 11. Центр развертки на всех рисунках совмещен с геометрическим центром первого витка фазы А для обмотки статора. Для удобства восприятия секция статора разбита на 4 пары элементов.

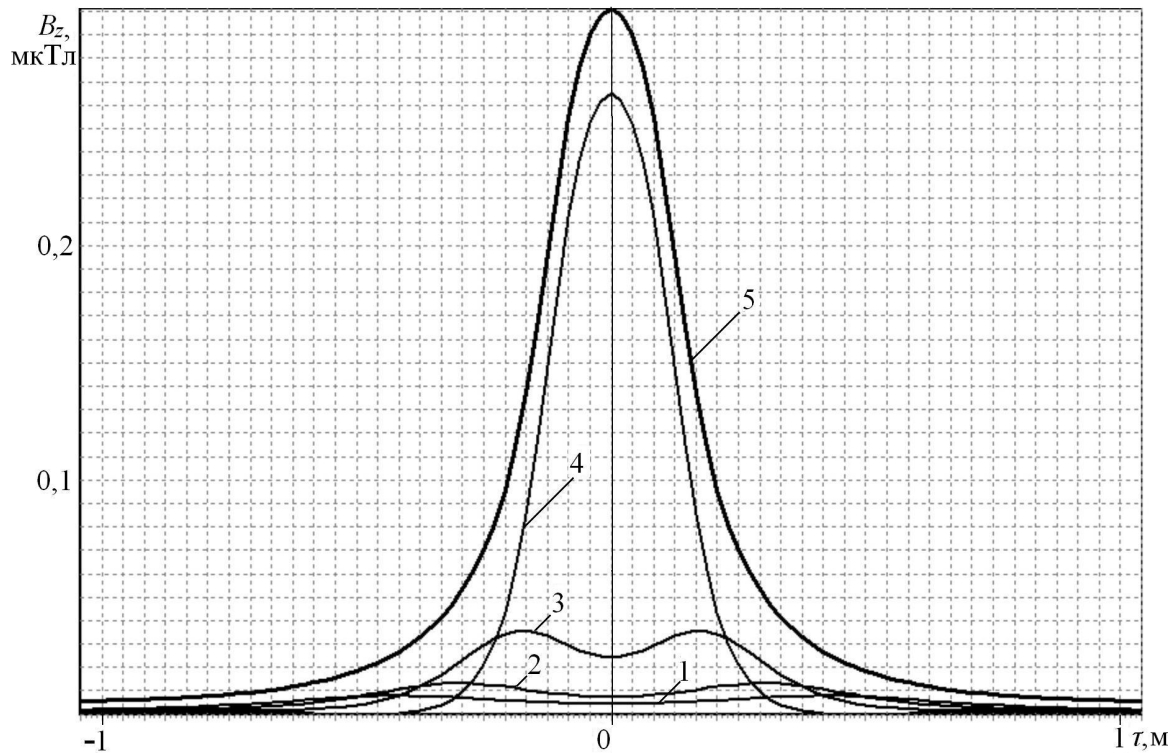


Рисунок 11 – Распределение аксиальной составляющей индукции лобового рассеяния от элементов витка статора ТВВ-500-2ЕУ3: 1...4 – индукции от четырех пар элементов секции статора; 5 – индукция от витка

Затем по известному распределению магнитного поля одного витка, месту расположения секций в сердечнике статора методом суперпозиции моделируется магнитное поле от лобовой части фазы.

Магнитное поле лобового рассеяния обмотки полюса представляется в виде суммы магнитных полей катушек. Первоначально определяют магнитное поле лобового рассеяния катушек полюсов с током $I_{f1}=1\text{А}$. При этом число витков в ней принимается равным w_f . Каждая катушка полюса заменяется парой симметричных проводников. Размеры и место расположения k -й пары проводников с учетом (рис.5) определяются по следующим формулам:

$$t_{zf} = \frac{\gamma\tau}{2K}; l_{xfk} = \frac{\tau}{2} - t_{zf}(k-0,5); x_{0fk} = \frac{l_{xfk}}{2}; y_{0fk} = h_{21}; z_{0fk} = t_{21} + \frac{(t_{12}-t_{11})}{K}(k-0,5).$$

По известным зависимостям $B_{y1,v}(x)$ и $B_{z1,v}(x)$, месту расположения i -ой секции статора, числу витков w_i и току I_i в них распределение радиальной и аксиальной составляющих магнитного поля лобового рассеяния обмотки статора

вдоль его развертки для произвольного значения времени определяется как:

$$B_{y1}(x) = \sum_{i=1}^{z1} I_i w_i B_{y1,v}(x) \text{ и } B_{z1}(x) = \sum_{i=1}^{z1} I_i w_i B_{z1,v}(x),$$

где $B_{y1,v}$ и $B_{z1,v}$ – радиальная и аксиальная составляющие индукции магнитного поля от i -й секции обмотки статора; w_i – число витков в секции; $z1$ – число секций обмотки статора.

Радиальная и аксиальная составляющие индукции магнитного поля полюса ротора

$$B_{yf,p} = \sum_k B_{yfk} ; B_{zf,p} = \sum_k B_{zfk},$$

где B_{yfk} и B_{zfk} – радиальная и аксиальная составляющие индукции магнитного поля от k -й катушки обмотки полюса ротора.

Очевидно, что по известным зависимостям $B_{yf,p}=f(x)$ и $B_{zf,p}=f(x)$, при фиксированных значениях y и z , числу витков w_f и току в роторе, а также по известному расположению осей симметрии каждого из полюсов легко рассчитать распределение радиальной и аксиальной составляющих индукции магнитного поля ротора вдоль развертки по уравнениям:

$$B_{yf}(x) = \sum_{j=1}^{N_p} I_{xf}(w_{f,j} - w_k) B_{yf,p}(x) \text{ и } B_{zf}(x) = \sum_{j=1}^{N_p} I_{xf}(w_{f,j} - w_k) B_{zf,p}(x),$$

где N_p – число полюсов.

Сопоставление результатов моделирования по методу Гринберга и зеркальных отражений с коррекцией токов показало, что они различаются не более, чем на 2...5 %. А так как метод Гринберга апробирован, то очевидно метод зеркальных отражений с коррекцией токов вполне пригоден для моделирования параметров преобразователей.

Методика была также проверена по показаниям ДМП, установленным на генератор ТВВ-500-2ЕУЗ Экибастузской ГРЭС-2 на время послеремонтных испытаний. При снятии характеристик холостого хода и короткого замыкания погрешность показаний ЭДС с ДМП составила 12...15 % от расчетных, что с учетом погрешности самого преобразователя вполне приемлемо.

При проектировании защит на встраиваемых ДМП в качестве измеряемого

параметра чаще всего используют только одну составляющую магнитного поля. Это значительно упрощает математические выражения и сокращает время моделирования.

1.4 Моделирование магнитного поля воздушного зазора

Величина воздушного зазора δ , в особенности у мощных СГ, в сравнении с размерами торцевой зоны значительна. Так, например, в СГ ТВВ-500-2ЕУЗ она составляет 95 мм при высоте и ширине расчетного призматического канала, равных 1020 и 1193 мм, соответственно. При этом максимальное значение индукции магнитного поля воздушного зазора может достигать величины 1,6...2,0 Тл, и поэтому поле «выпучивания» [3] из воздушного зазора в торцевую зону оказывается значительным. Оценка влияния этого поля на ДМП необходима. Точное моделирование поля воздушного зазора является достаточно сложной задачей по целому ряду причин, в частности, из-за неравномерности воздушного зазора в аксиальном направлении у торцов сердечника статора неявнополюсных СГ, а также из-за его неравномерности в тангенциальном направлении у явнополюсных СГ. В этой связи для его приближенной оценки предлагается воспользоваться моделью, прототип которой изложен в. Несмотря на то, что эта модель простая, она дает неплохие результаты.

В этом исходе поле «выпучивания» воздушного зазора заменяется полем проводника диаметром $d_\delta = (0,1...0,2)\delta$ с током I_δ в нем. Расчетная схема для моделирования этого поля приведена на рис. 12, а.

При расположении ДМП напротив середины катушечной группы с максимальной величиной тока, в момент времени $t=0$ составляющие магнитного поля бесконечного проводника с током I_δ определяются как:

$$B_{y(i,j)} = \frac{I_{\delta(i,j)} \mu_0 K_y |z_j - z|}{2 \pi b_{x(i,j)}^2}; \quad B_{z(i,k)} = \frac{I_{\delta(i,j)} \mu_0 K_z |y_i - y|}{2 \pi b_{x(i,j)}^2}$$

$$B_{(i,k)} = \sqrt{B_{y(i,j)}^2 + B_{z(i,k)}^2}; \quad b_{x(i,j)} = \sqrt{(y_i - y)^2 + (z_j - z)^2},$$

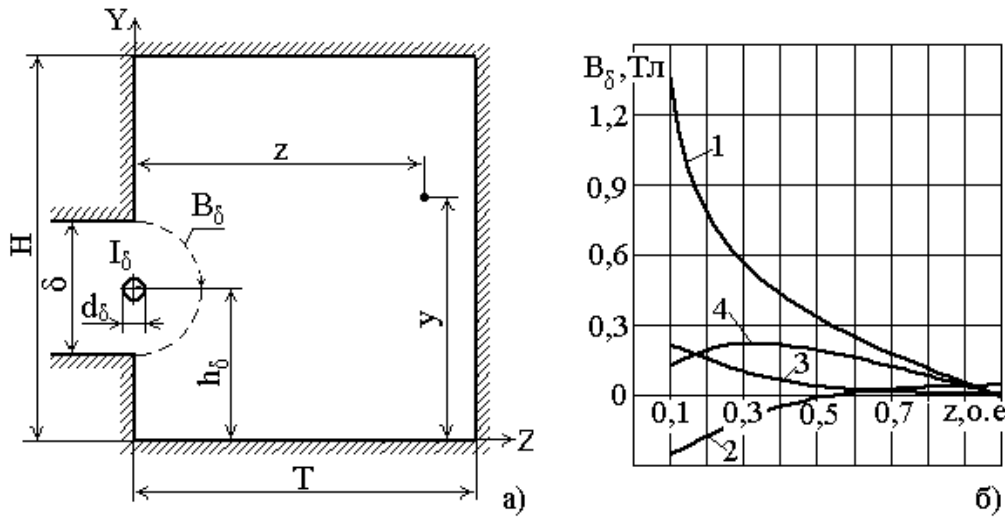


Рисунок 12 – Расчетная схема и результаты расчета поля воздушного зазора в торцевой зоне СТ

где y_i, z_j – координаты i, j -го отражения проводника; y, z – координаты точки расположения ДМП.

В результате радиальная и аксиальная составляющие магнитного поля в торцевой зоне определяются как:

$$B_{y\delta} = \sum_i \sum_k B_{y(i,j)} \text{ и } B_{z\delta} = \sum_i \sum_k B_{z(i,j)}.$$

Величина тока I_δ в проводнике рассчитывается по уравнению Био-Савара-Лапласа с учетом (рис. 12, а) как:

$$I_\delta = \frac{B_\delta \pi (\delta - d_\delta)}{\mu_0} = \frac{0,9 \delta B_\delta \pi}{\mu_0},$$

где B_δ – индукция магнитного поля воздушного зазора.

Результаты моделирования магнитных полей «выпучивания» воздушного зазора приведены на рис. 12, б, где кривые 1 и 2 – радиальная и аксиальная составляющие этого поля при $y = h_\delta$, а кривые 3 и 4 – эти же составляющие, но при $y = 0,6$ м. Погрешность результатов моделирования аксиальной составляющей на торцевом щите или вблизи него редко превышает 15...20 и хорошо согласуются. В большинстве случаев такая погрешность вполне устраивает.

1.5 Моделирование магнитного поля торцевого щита

Магнитное поле торцевого щита СГ формируется токами в проводниках лобовых и пазовых частей обмоток статора и ротора, а также полем воздушного зазора и определяется ферромагнитными элементами в ней. Его точное моделирование в произвольном режиме работы СГ достаточно сложно. В основе расчета лежит оригинальный метод моделирования, изложенный в.

На рис. 13, а приведена схема распределения магнитных потоков в ферромагнитных элементах торцевой зоны, которая учитывает особенности конструкции СГ. Из схемы видно, что в отличие от нее одна из стенок прямоугольного ферромагнитного канала расчетной зоны заменяется двумя.

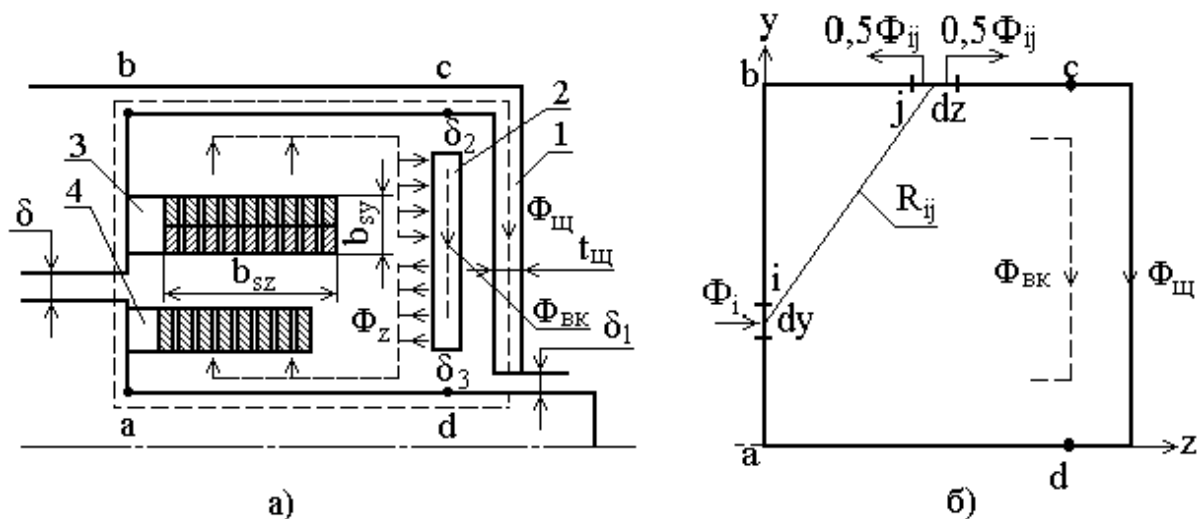


Рисунок 13 – Расчетная схема торцевой зоны турбогенератора

1 - торцевой щит; 2 – стенка вентиляционного канала; 3 и 4 сечение обмоток статора и ротора

Первая является стенкой вентиляционного канала. Именно ее обычно используют при расчете магнитного поля статора, ротора и воздушного зазора в торцевой зоне. Ее края не доходят в верхней точке до корпуса на δ_2 (точка c), а в нижней – до вала на δ_3 (точка d). Поэтому считается, что через нее замыкается магнитный поток Φ_{BK} , обусловленный магнитными потоками Φ_z через ее внутреннюю поверхность. На этой стенке ДМП обычно не размещают, а поток Φ_{BK} не рассчитывают.

Вторая поверхность образована торцевым щитом. Ее при расчете магнитного поля торцевой зоны СГ от статора, ротора и воздушного зазора не учитывают, так как ее экранирует стенка вентиляционного канала. Она примыкает к корпусу практически без зазора, а к валу СГ – с зазором δ_1 .

Считается, что именно через нее замыкается магнитный поток $\Phi_{щ}$, образованный магнитными потоками через три остальные стенки призматического канала. Моделирование $\Phi_{щ}$ осуществляют следующим образом.

В соответствии с граничными условиями, тангенциальная составляющая поля от обмоток статора и ротора B_1^r и B_f^r на любой из пограничных плоскостей равна нулю. Поэтому, магнитные потоки через стенку определяют только по B_1^r и B_f^r – их нормальной составляющей. В соответствии с рис. 9 и 13, а, на стенках $b-c$ и $a-d$ это B_{y1} и B_{yf} , а на стенке $a-b$ соответственно B_{z1} и B_{zf} .

На рис. 14, а приведены кривые распределения нормальной составляющей магнитной индукции B_{y1} и B_{yf} , по пограничным поверхностям торцевой зоны СГ ТВВ-500-2ЕУЗ, рассчитанные для режима номинальной нагрузки.

Так как $B_1^n = f(l)$ и $B_f^n = f(l)$ известны, то распределение магнитных потоков от их вдоль пограничных поверхностей моделируется по расчетной схеме (рис. 13, б) при следующих допущениях:

1. Падением магнитного напряжения в ферромагнитных элементах, а также воздушными зазорами δ и δ_3 пренебрегается.

2. Величина магнитного потока i -го элемента через j -й элемент (Φ_{ij}) считается прямо пропорциональной Φ_i – магнитному потоку i -го элемента и обратно пропорциональной R_{ij} воздушному промежутку между i -м и j -м элементами.

3. Составляющие магнитного потока Φ_{ij} по контуру вдоль пограничных поверхностей и против часовой стрелки равны по величине. Положительным

направлением при суммировании магнитных потоков в этом случае считается направление по часовой стрелке.

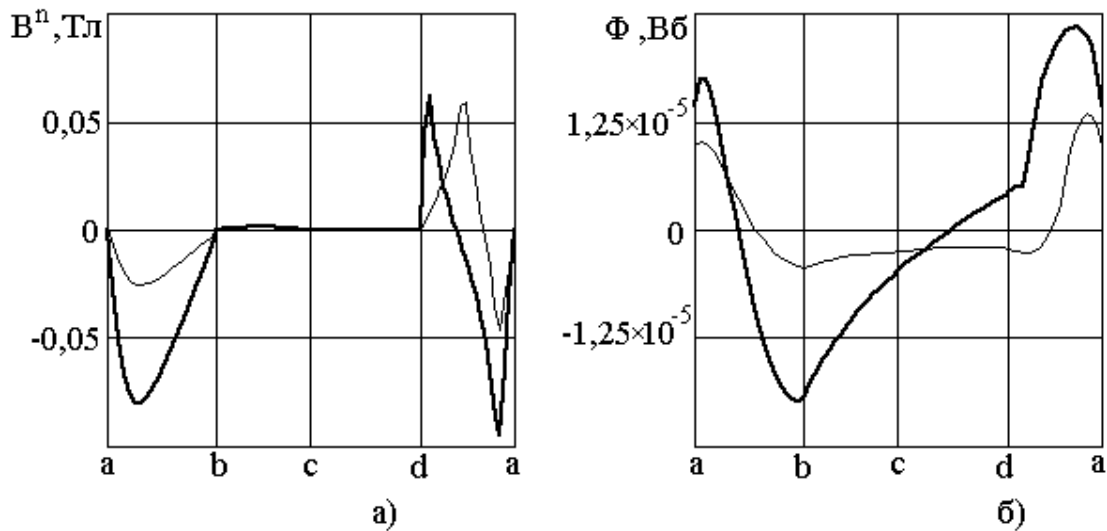


Рисунок 14 – Распределение магнитной индукции от обмоток статора и ротора ТВВ-500-2ЕУ3 по поверхности ферромагнитных стенок торцевой зоны – (а) и магнитных потоков по ферромагнитным стенкам – (б).

Моделирование магнитных потоков вдоль поверхности ферромагнитных элементов торцевой зоны осуществляется в следующем порядке. Первоначально в соответствии с рис. 13 ферромагнитные поверхности вдоль обхода контура разбиваются на элементарные площадки с размерами $\Delta y \times b_{cn}$ и $\Delta z \times b_{cn}$, где b_{cn} – размер площадки вдоль оси x . Затем определяются их координаты (y_i, z_i) и воздушный промежуток R_{ij} по торцевой зоне между ними:

$$R_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}.$$

Затем находится расчетное расстояние между i -им и всеми j -ми элементами:

$$R_{si} = \frac{1}{\sum_j \frac{1}{R_{ij}}}$$

и определяется часть магнитного потока Φ_i через j -й элемент:

$$\Phi_{ij} = \frac{\Phi_{ij} R_{si}}{R_{ij}}.$$

Магнитный поток вдоль i -й элементарной площадки определяется как сумма потоков Φ_{ij} в ее границах. На рис. 14, б кривыми (—) и (---) показано рассчитанное распределение магнитных потоков от обмоток статора и ротора вдоль граничных поверхностей СГ ТВВ-500-2ЕУЗ, где $\Phi_{щ}$ – магнитный поток в торцевом щите, проходящий по отрезку $c-d$.

Поле в торцевом щите токов в проводниках, расположенных в пазах статора и ротора, моделируется по известному распределению магнитной индукции в воздушном зазоре СГ. При этом считается, что падение магнитного напряжения в ферромагнитных элементах конструкции торцевой зоны равно нулю. Тогда для магнитной цепи «а» ... «д» на рис. 14, а магнитное напряжение по основной гармонической можно записать:

$$U_{ad} = H_{\delta} \delta = H_{\delta 1} \delta_1.$$

В области уплотнения:

$$H_{\delta 1} = \frac{H_{\delta} \delta}{\delta_1} \text{ и } B_{\delta 1} = \mu_0 H_{\delta 1}, \quad (16)$$

а магнитный поток:

$$\Phi_{щ} = B_{\delta 1} b_{cn} t_{щ}. \quad (17)$$

Из (16) и (17) видно, что магнитный поток в торцевом щите от B_{δ} в основном зависит от δ_1 . Определение их величин затруднено тем, что значительная часть $\Phi_{щ}$ в области уплотнения замыкается через воздух, в том числе и через наружную сторону торцевого щита. Поэтому для упрощения расчетов, как показали эксперименты, следует принимать $\delta_1 = (0,05...0,2)\delta$.

Экспериментальная проверка расчетов $B_{\delta 1}$ и $\Phi_{щ}$ проводилась на СГ ТВВ-500-2ЕУЗ в режиме нагрузки. Магнитный поток вблизи уплотнения измерялся катушкой индуктивности без сердечника, а в щите катушкой с П-образным сердечником. Погрешность метода моделирования не превысила 20 %.

Анализ результаты моделирования составляющих магнитного потока в щите $\Phi_{щ}$ по рис. 14, б показывает, что существует зона, где статорная составляющая близка к нулю. В то же время роторная составляющая имеет достаточную для измерения величину. Следовательно, на торцевом щите (отрезок $c - d$ рис. 14, б) имеется участок, магнитный поток в котором наводится в основном от обмотки ротора, и именно в этой зоне наиболее целесообразна установка магнитного шунта.

ГЛАВА 2. РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ АСИНХРОННЫХ МАШИН

2.1 Моделирование статорной обмотки

Асинхронная электрическая машина, аналогично синхронной, это также сложная электромеханическая система, в которой все происходящие процессы взаимосвязаны. Учет всех сложных взаимосвязей при исследовании асинхронных двигателей (АД) с повреждением короткозамкнутой обмотки ротора приводит к необходимости разработки математической модели АД, способной учесть несимметричные аварийные и нормальные режимы работы.

Часто процесс преобразования энергии в АД с короткозамкнутой обмоткой ротора в переходных и стационарных режимах описывается математической моделью в фазных координатах, однако для исследований связанных с электрической несимметрией роторных цепей наиболее адекватной является модель в многофазной системе координат, представленная на рис. 15. Представление математической модели АД в многофазной системе координат позволяет максимально достоверно описать физические процессы в статорных обмотках при повреждении «беличьей клетки» ротора.

В математической модели АД принимаются следующие допущения:

- не учитываются потери в стали, вызываемые протеканием вихревых токов в магнитопроводе двигателя и его перемагничиванием;
- не учитывается насыщение магнитной цепи АД;
- энергия магнитного поля сосредоточена в воздушном зазоре;
- воздушный зазор равномерен;
- пренебрегается эффектом вытеснения токов в проводниках ротора;
- напряжения фаз синусоидальны;
- питающая сеть – идеальная.

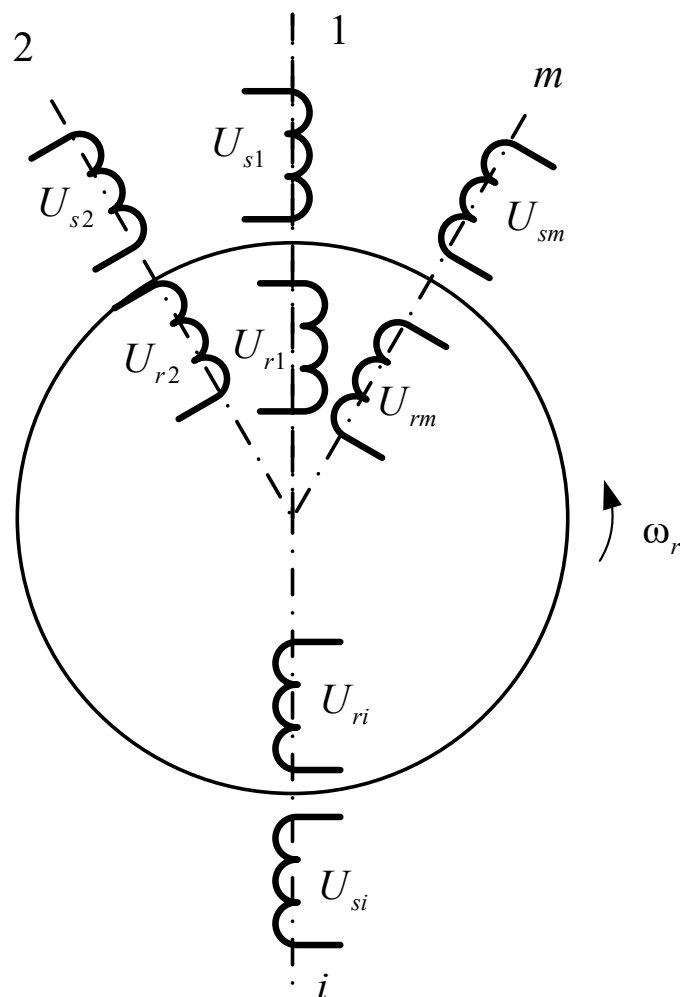


Рисунок 15 – Пространственная модель АД в m – фазной системе координат

Для нахождения токов двигателя необходимо решить при заданных начальных условиях систему дифференциальных уравнений, записанных по второму закону Кирхгофа для каждой фазы двигателя. Уравнение для фазных обмоток статора:

$$U_{s1} = R_s i_{s1} + \frac{d\Psi_{s1}}{dt};$$

$$U_{s2} = R_s i_{s2} + \frac{d\Psi_{s2}}{dt};$$

$$\dots\dots\dots$$
(18)

$$U_{sm} = R_s i_{sm} + \frac{d\Psi_{sm}}{dt}.$$

Уравнения для фазных обмоток ротора:

$$0 = R_r i_{r1} + \frac{d\Psi_{r1}}{dt};$$

$$0 = R_r i_{r2} + \frac{d\Psi_{r2}}{dt};$$

.....

$$0 = R_r i_{rm} + \frac{d\Psi_{rm}}{dt};$$

(19)

где индексы $s1, s2, \dots, sm$ соответствуют обмоткам статора, индексы $r1, r2, \dots, rm$ соответствуют обмоткам ротора.

Порядок системы дифференциальных уравнений (19) определяется количеством стержней короткозамкнутой обмотки ротора. С увеличением количества стержней в роторе порядок системы повышается.

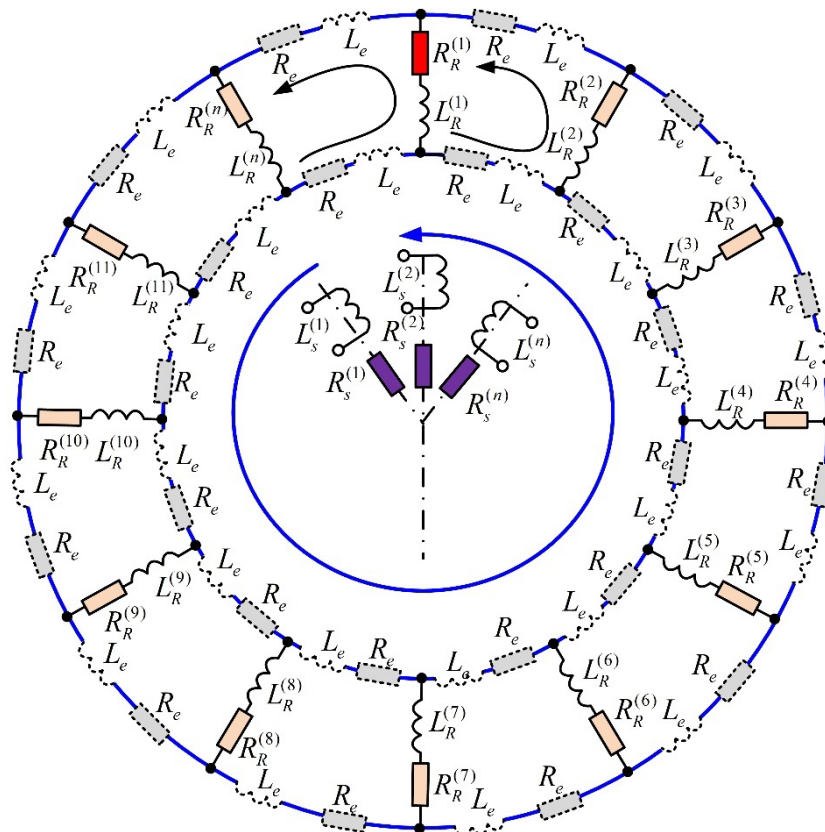


Рисунок 16 – Схема замещения статора и ротора, применяемая в предлагаемой математической модели в многофазной системе координат

Вектор входных напряжений формируется следующим образом:

$$U_{\text{вх}} = [U^{(1)} U^{(2)} \dots U^{(n)} 0 \dots 0^{(n)}]^T, \quad (20)$$

Составляющие напряжения в многомерной системе координат описываются по следующему выражению:

$$U^{(n)} = U_m \cdot \cos(\Theta + \varphi_{\text{сд}}), \quad (21)$$

где U_m – амплитудное значение; $\theta = 2\pi ft = \omega t$; $\varphi_{\text{сд}}$ – угол сдвига.

Напряжения в трехфазной системе:

$$U_A(t) = \sqrt{2} U_A \sin(\omega \cdot t), \quad (22)$$

$$U_B(t) = \sqrt{2} U_B \sin\left(\omega \cdot t - \frac{2\pi}{3}\right), \quad (23)$$

$$U_C(t) = \sqrt{2} U_C \sin\left(\omega \cdot t + \frac{2\pi}{3}\right), \quad (24)$$

Амплитудное значение напряжения для каждой фазы статора не зависит от системы координат:

$$U_m = \sqrt{U_A^2 + \frac{(U_B - U_C)^2}{3}} = \sqrt{2} \cdot U.$$

Угол θ определяется из уравнений напряжений в трехфазной системе координат:

$$\theta = \arctan\left(\frac{U_A \sqrt{3}}{U_B - U_C}\right).$$

Угол сдвига $\varphi_{\text{сд}}$ зависит от количества стержней и находится с помощью выражения:

$$\varphi_{\text{сд}} = \frac{2 \cdot \pi}{n}.$$

По закону Ампера находятся токи статорных и роторных цепей:

$$\begin{bmatrix} \bar{\Psi}_S \\ \bar{\Psi}_R \end{bmatrix} = L_0 \begin{bmatrix} \bar{I}_S \\ \bar{I}_R \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \bar{I}_S \\ \bar{I}_R \end{bmatrix} = L_0^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\Psi}_S \\ \bar{\Psi}_R \end{bmatrix},$$

где $L = \begin{bmatrix} L_{S0} & L_{SR} \\ L_{RS} & L_{R0} \end{bmatrix}$ – матрица индуктивностей; L_S – собственная матрица

индуктивностей для статора; L_R – собственная матрица индуктивностей для ротора; L_{SR}, L_{RS} – матрицы взаимных индуктивностей; $\bar{\Psi}_S = [\psi_S^{(1)}, \dots, \psi_S^{(n)}]^T$ – вектор потокосцепления статора; $\bar{\Psi}_R = [\psi_R^{(1)}, \dots, \psi_R^{(n)}]^T$ – вектор потокосцепления ротора; $\bar{I}_{S1} = [I_S^{(1)}, \dots, I_S^{(n)}]^T$ – вектор тока статора; $\bar{I}_{R2} = [I_R^{(1)}, \dots, I_R^{(n)}]^T$ – вектор тока ротора; $\bar{I}_{S1} = [I_S^{(1)}, \dots, \psi_S^{(n)}]^T$

Собственные матрицы индуктивностей статора и ротора определяются при помощи вспомогательной матрицы коэффициентов $Corr(\varphi)$:

$$Corr(\varphi) = \begin{bmatrix} 0 & \cos(\varphi) & \cos(2\varphi) & \dots & \cos(-(n-1)\varphi) \\ \cos(-\varphi) & 0 & \cos(\varphi) & \dots & \cos(-(n-2)\varphi) \\ \cos(-2\varphi) & \cos(-\varphi) & 0 & \dots & \cos(-(n-3)\varphi) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \cos(-(n-1)\varphi) & \cos(-(n-2)\varphi) & \cos(-(n-3)\varphi) & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, матрица собственных индуктивностей статора:

$$L_{S0} = L_m \cdot Corr(\varphi) + \text{diag}[L_S^{(1)}, L_S^{(2)}, \dots, L_S^{(n)}],$$

а матрица собственных индуктивностей ротора:

$$L_{R0} = L_m \cdot Corr(\varphi) + \text{diag}[L_R^{(1)}, L_R^{(2)}, \dots, L_R^{(n)}].$$

В свою очередь L_{SR} и L_{RS} заданы при помощи вспомогательной матрицы, зависимой от φ и γ :

$$Cosr(\gamma, \varphi) = \begin{bmatrix} \cos(\gamma_e) & \cos(\gamma_e - \varphi) & \dots & \cos(\gamma_e - (n-1) \cdot \varphi) \\ \cos(\gamma_e - \varphi) & \cos(\gamma_e - \varphi - \varphi) & \dots & \cos(\gamma_e - (n-1) \cdot \varphi - \varphi) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \cos(\gamma_e - (n-1)\varphi) & \cos(\gamma_e - \varphi - (n-1)\varphi) & \dots & \cos(\gamma_e - (n-1)\varphi - (n-1)\varphi) \end{bmatrix},$$

где $\frac{d\gamma_e}{dt} = z_p \int \omega_r dt$ – угол поворота ротора.

Имея выражения для вычисления L_{SR} и L_{RS} :

$$L_{RS} = L_m \cdot Cosr(\gamma, \varphi),$$

$$L_{SR} = L_m \cdot Cosr(\gamma, \varphi)^T,$$

получена следующая система дифференциальных уравнений:

$$\begin{bmatrix} \frac{d\psi_s^{(1)}}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d\psi_s^{(n)}}{dt} \\ \frac{d\psi_R^{(1)}}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d\psi_R^{(n)}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U^{(1)} \\ \vdots \\ U^{(n)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0^{(n)} \end{bmatrix} - R \cdot L_0^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \psi_S^{(1)} \\ \vdots \\ \psi_S^{(n)} \\ \psi_R^{(1)} \\ \vdots \\ \psi_R^{(n)} \end{bmatrix}, \quad (25)$$

где $R = \begin{bmatrix} R_{S0} & 0 \\ 0 & R_{R0} \end{bmatrix}$ – главная матрица сопротивлений;

$R_{S0} = \text{diag}[R_S^{(1)}, R_S^{(2)}, \dots, R_S^{(n)}]$ – матрица сопротивлений статора;

$R_{R0} = \text{diag}[R_r^{(1)}, R_r^{(2)}, \dots, R_r^{(n)}]$ – матрица сопротивлений ротора.

На основе токов статора и ротора определяется электромагнитный момент АД:

$$M_{\text{ДВ}} = -z_p \cdot \bar{I}_S^T \cdot L_n \cdot \bar{I}_R \cdot \frac{3}{n} \quad (26)$$

где z_p – число пар полюсов; $3/n$ – коэффициент, который позволяет обеспечивать паспортный момент на валу АД независимо от размерности системы дифференциальных уравнений;

$$s(\varphi, \gamma_e) = \begin{bmatrix} \sin(\gamma_e) & \sin(\gamma_e - \varphi) & \dots & \sin(\gamma_e - (n-1)\varphi) \\ \sin(\gamma_e - \varphi) & \sin(\gamma_e - \varphi - \varphi) & \dots & \sin(\gamma_e - (n-1)\varphi - \varphi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin(\gamma_e - (n-1)\varphi) & \sin(\gamma_e - \varphi - (n-1)\varphi) & \dots & \sin(\gamma_e - (n-1)\varphi - (n-1)\varphi) \end{bmatrix}$$

– вспомогательная матрица; $L_n = \frac{d[L_{rs}]}{d\gamma_b} = s \cdot L_m$.

Механика предлагаемой математической модели построена на основе одномассовой системы:

$$M_{\text{ДВ}} - M_C = J \frac{d\omega}{dt}, \quad (27)$$

где M_C – момент нагрузки; J – момент инерции двигателя.

Обрыв стержня имитируется исключением из расчета одного стержня, путем введения добавочного сопротивления в матрицу R_{R0} . Данный способ дает

возможность регулировать количество оборванных стержней.

В системе (27) роторные величины приведены к обмотке статора. Потокосцепления с фазами обмоток статора и ротора выражаются через токи фаз и соответствующие индуктивности, для фазы «s1» статора:

$$\Psi_{s1} = L_{s1} \cdot i_{s1} + L_{s12} \cdot i_{s2} + \dots + L_{s1m} \cdot i_{sm} + L_{s1r1} \cdot i_{r1} + L_{s1r2} \cdot i_{r2} + \dots + L_{s1rm} \cdot i_{rm}; \quad (28)$$

для фазы «a» ротора:

$$\Psi_{r1} = L_{r1s1} \cdot i_{s1} + L_{r1s2} \cdot i_{s2} + \dots + L_{r1sm} \cdot i_{sm} + L_{r1} \cdot i_{r1} + L_{r12} \cdot i_{r2} + \dots + L_{r1m} \cdot i_{rm}; \quad (29)$$

Для того чтобы решить систему дифференциальных уравнений численными методами необходимо ее привести к нормальной форме Коши.

Электрическая часть АД описывается в соответствии со вторым законом Кирхгофа и в матричном виде имеет следующий вид:

$$\frac{d[\Psi]}{dt} = [U] - [R][I],$$

где $[\Psi] = [\Psi_{s1} \dots \Psi_{sm} \Psi_{r1} \dots \Psi_{rm}]$ – вектор потокосцеплений;

Ψ_{si} – мгновенные значения потокосцеплений статора; Ψ_{ri} – мгновенные значения потокосцеплений ротора; m – количество фаз АД, которое равно количеству стержней ротора $m = z_2$;

$[U] = [U_{s1} \ U_{s2} \ \dots \ U_{sm} \ U_{r1} \ U_{r2} \ \dots \ U_{rm}]^T$ – вектор напряжений;

U_{si} – мгновенные значения напряжений статора; U_{ri} – мгновенные значения напряжений ротора;

$[I] = \begin{bmatrix} [I_s] \\ [I_r] \end{bmatrix}$ – вектор токов;

$[I_s] = [I_{s1} \ I_{s2} \ \dots \ I_{sm}]^T$ – вектор токов статора;

I_{si} – мгновенные значения токов статора;

$[I_r] = [I_{r1} \ I_{r2} \ \dots \ I_{rm}]^T$ – вектор токов ротора;

I_{ri} – мгновенные значения токов ротора;

$$[R] = \begin{bmatrix} R_{s1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_{s2} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & R_{sm} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & R_{r1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & R_{r2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & R_{rm} \end{bmatrix} \text{ – матрица сопротивлений;}$$

R_{si} – активное сопротивление фазы статора; R_{ri} – активное приведенное сопротивление фазы ротора.

Токи определяются по закону Ампера и в матричном виде имеют вид:

$$[I] = [L]^{-1} [\Psi],$$

где $[L] = \begin{bmatrix} [L_s] & [L_{sr}] \\ [L_{rs}] & [L_r] \end{bmatrix}$ – матрица индуктивностей;

$$[L_s] = \begin{bmatrix} L_{s1} & L_{s12} \cos(\varphi) & L_{s13} \cos(2\varphi) & \dots & L_{s1m} \cos((m-1)\varphi) \\ L_{s21} \cos(-\varphi) & L_{s2} & L_{s23} \cos(\varphi) & \dots & L_{s2m} \cos((m-2)\varphi) \\ L_{s31} \cos(-2\varphi) & L_{s32} \cos(-\varphi) & L_{s3} & \dots & L_{s3m} \cos((m-3)\varphi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{s1m} \cos(-(n-1)\varphi) & L_{s2m} \cos(-(n-2)\varphi) & L_{s3m} \cos(-(n-3)\varphi) & \dots & L_{sm} \end{bmatrix} \text{ –}$$

матрица собственных индуктивностей статора;

$L_{s1}, L_{s2}, L_{s3}, \dots, L_{sm}$ – главные индуктивности фаз статора;

$L_{s12}, L_{s13}, \dots, L_{s1m}, L_{s21}, L_{s23}, \dots, L_{s2m}, L_{s31}, L_{s32}, \dots, L_{s3m}, L_{sm1}, L_{sm2}, L_{sm3}, \dots, L_{sm(m-1)}$ –

взаимные индуктивности между фазами статора;

$\varphi = \frac{2\pi}{n}$ – угол между соседними стержнями ротора;

$$[L_r] = \begin{bmatrix} L_{r1} & L_{r12} \cos(\varphi) & L_{r13} \cos(2\varphi) & \dots & L_{r1m} \cos((m-1)\varphi) \\ L_{r21} \cos(-\varphi) & L_{r2} & L_{r23} \cos(\varphi) & \dots & L_{r2m} \cos((m-2)\varphi) \\ L_{r31} \cos(-2\varphi) & L_{r32} \cos(-\varphi) & L_{r3} & \dots & L_{r3m} \cos((m-3)\varphi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{rm1} \cos(-(m-1)\varphi) & L_{rm2} \cos(-(m-2)\varphi) & L_{rm3} \cos(-(m-3)\varphi) & \dots & L_{rm} \end{bmatrix} \text{ –}$$

матрица собственных индуктивностей ротора;

$L_{r1}, L_{r2}, L_{r3}, \dots, L_{rm}$ – главные индуктивности фаз ротора;

$L_{r12}, L_{r13}, \dots, L_{r1m}, L_{r21}, L_{r23}, \dots, L_{r2m}, L_{r31}, L_{r32}, \dots, L_{r3m}, L_{rm1}, L_{rm2}, L_{rm3}, \dots, L_{rm(m-1)}$ –

взаимные индуктивности между фазами ротора;

$$[L_{sr}] = \begin{bmatrix} L_{s1r1} \cos(\theta_e) & L_{s1r2} \cos(\theta_e - \varphi) & \dots & L_{s1rm} \cos(\theta_e - (m-1)\varphi) \\ L_{s2r1} \cos(\theta_e - \varphi) & L_{s2r2} \cos(\theta_e - \varphi - \varphi) & \dots & L_{s2rm} \cos(\theta_e - (m-1)\varphi - \varphi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{smr1} \cos(\theta_e - (m-1)\varphi) & L_{smr2} \cos(\theta_e - \varphi - (n-1)\varphi) & \dots & L_{smrm} \cos(\theta_e - (m-1)\varphi - (m-1)\varphi) \end{bmatrix} -$$

матрица взаимных индуктивностей между статором и ротором;

$L_{s1r1}, L_{s1r2}, L_{s1r3}, \dots, L_{s1rm}, L_{s2r1}, L_{s2r2}, L_{s2r3}, \dots, L_{s2rm}, L_{s3r1}, L_{s3r2}, L_{s3r3}, \dots, L_{s3rm},$

$L_{smr1}, L_{smr2}, L_{smr3}, \dots, L_{smrm}$ – взаимные индуктивности между фазами статора и ротора; θ_e – электрический угол поворота ротора; $[L_{rs}] = [L_{sr}]^T$.

Главные индуктивности всех фаз являются одинаковыми и не зависящими от углового положения ротора [1]:

$$L_{s1}, L_{s2}, L_{s3}, \dots, L_{sm}, L_{r1}, L_{r2}, L_{r3}, \dots, L_{rm} = L_m;$$

где L_m – максимальная приведенная взаимная индуктивность между фазами статора и ротора. Взаимные индуктивности между фазами статора, между фазами ротора и между фазами статора и ротора:

$L_{s12}, L_{s13}, \dots, L_{s1m}, L_{s21}, L_{s23}, \dots, L_{s2m}, L_{s31}, L_{s32}, \dots, L_{s3m}, L_{sm1}, L_{sm2}, L_{sm3}, \dots, L_{sm(m-1)},$

$L_{r12}, L_{r13}, \dots, L_{r1m}, L_{r21}, L_{r23}, \dots, L_{r2m}, L_{r31}, L_{r32}, \dots, L_{r3m}, L_{rm1}, L_{rm2}, L_{rm3}, \dots, L_{rm(m-1)},$

$L_{s1r1}, L_{s1r2}, L_{s1r3}, \dots, L_{s1rm}, L_{s2r1}, L_{s2r2}, L_{s2r3}, \dots, L_{s2rm}, L_{s3r1}, L_{s3r2}, L_{s3r3}, \dots, L_{s3rm},$

$L_{smr1}, L_{smr2}, L_{smr3}, \dots, L_{smrm} = L_m$

Электромагнитный момент, развиваемый асинхронным двигателем, определим из токов статора и ротора:

$$M_e = \frac{3}{n} z_p [I_s]^T \frac{d[L_{sr}]}{d\theta_e} [I_r],$$

где

$$\frac{d[L_{sr}]}{d\theta_e} = \begin{bmatrix} L_m \sin(\theta_e) & L_m \sin(\theta_e - \varphi) & \dots & L_m \sin(\theta_e - (m-1)\varphi) \\ L_m \sin(\theta_e - \varphi) & L_m \sin(\theta_e - \varphi - \varphi) & \dots & L_m \sin(\theta_e - (m-1)\varphi - \varphi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_m \sin(\theta_e - (m-1)\varphi) & L_m \sin(\theta_e - \varphi - (m-1)\varphi) & \dots & L_m \sin(\theta_e - (m-1)\varphi - (m-1)\varphi) \end{bmatrix}.$$

Результирующий электромагнитный момент обмотки равен сумме электромагнитных моментов каждой из фаз этой обмотки. Так как в модели использовались параметры трехфазных обмоток, то результирующий электромагнитный момент умножается на коэффициент $\frac{3}{m}$.

Скорость вращения ротора определяется как решение уравнения движения, являющегося следствием второго закона Ньютона:

$$\frac{d\omega_r}{dt} = \frac{z_p (M_e - M_c)}{J_\Sigma},$$

где ω_r - угловая скорость двигателя.

Угол поворота вектора потокосцепления ротора:

$$\frac{d\theta_e}{dt} = z_p \int \omega_r dt.$$

Моделирование обрыва стержня обмотки ротора осуществляется введением высокоомного добавочного сопротивления в матрицу сопротивлений [4].

2.2 Реализация математической модели АД с короткозамкнутым ротором при моделировании повреждений в обмотке ротора

Математическая модель реализована с помощью системы компьютерной математики MATLAB и ее расширения Simulink, которое позволяет производить блочное визуально-ориентированное имитационное моделирование различных систем и устройств [5].

Имитационная модель АД с короткозамкнутым ротором представлена на рис. 17. Вектор напряжений статора U (блок 1) связан с преобразователем координат из неподвижной («трехфазной») системы координат (СК) в СК,

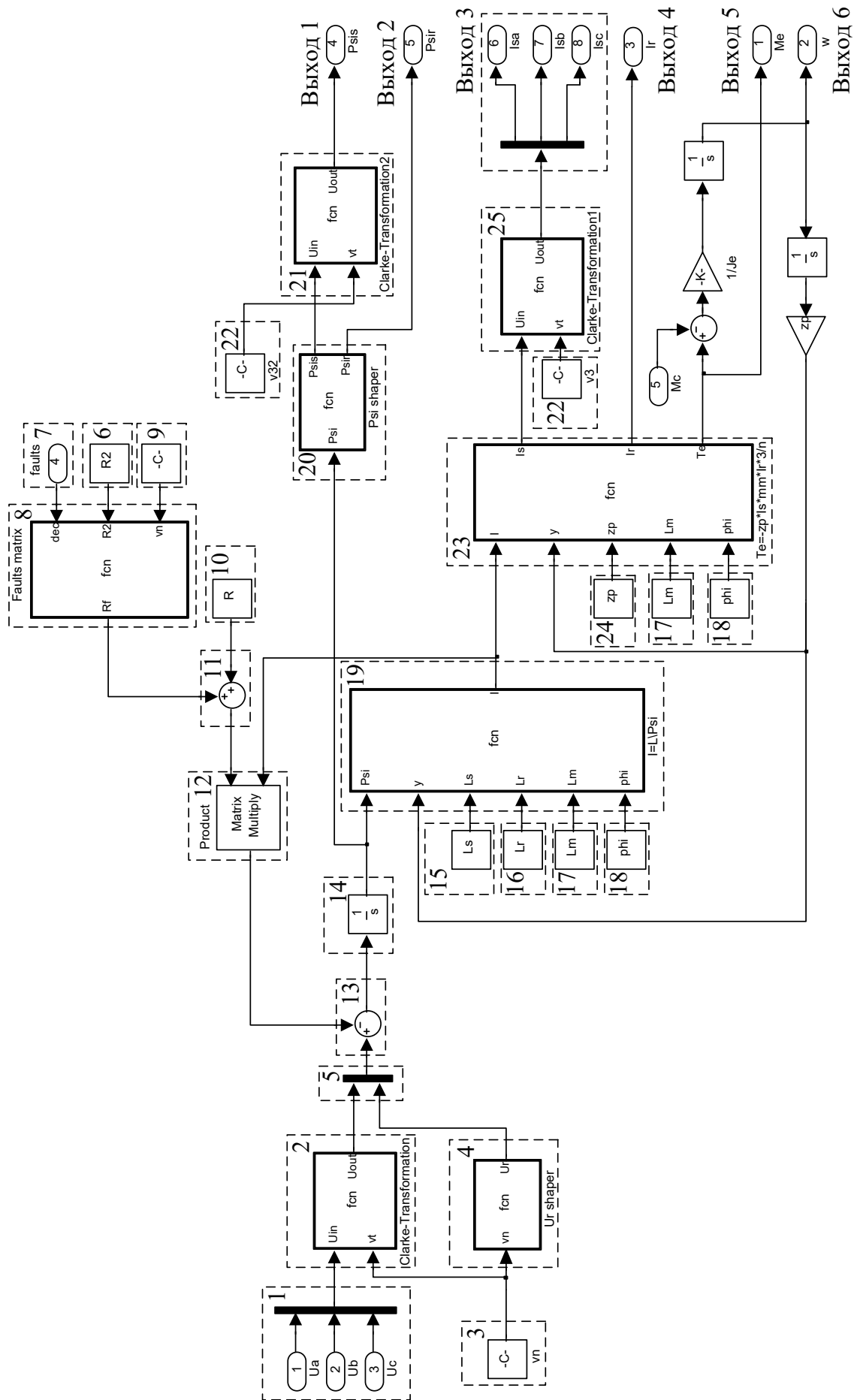


Рисунок 17 – Схема имитационной модели асинхронного двигателя с повреждениями стержней ротора

связанную с ротором («многофазную») (блок 2). На блок 2 поступает сигнал от количества фаз в роторе (блок 3) для преобразования вектора напряжений статора из неподвижной «трехфазной» СК в «многофазную» СК, связанную с ротором. В блоке 4 происходит формирование вектора напряжений ротора, значения которого равны нулю, т.к. ротор АД – короткозамкнутый, и он связан с блоком 3. Далее происходит объединение вектора напряжений статора с вектором напряжений ротора, представленных в «многофазной» СК (блок 5).

Количество фаз ротора (блок 3) задается вектором размерностью $(m \times 1)$, где m – количество фаз в роторе.

Значение сопротивления фазы ротора (блок 6) равно R_2 .

Последовательность оборванных стержней (блок 7) представлена в десятичной системе исчисления, которая в формирователе матрицы сопротивлений поврежденных стержней (блок 8) преобразуется в двоичную систему, где 1 означает, что стержень оборван, а 0 – стержень не поврежден, например, если количество стержней в роторе равно 6 и при этом первый и второй стержни оборваны то блоке 7 задается следующим образом $[1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$, а в десятичной системе исчисления нужно записать 3.

Формирование матрицы сопротивлений поврежденных стержней происходит в блок 8 при подаче на него данных о количестве фаз ротора (блок 9), сопротивление фазы ротора (блок 6) и последовательность оборванных стержней (блок 7). Матрица сопротивлений поврежденных стержней имеет вид

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R \end{bmatrix}, \text{ т.е. если есть повреждение, то ставиться сопротивление}$$

$R \gg R_2$, а если нет – 0.

Матрица активных сопротивлений статора и ротора задается в блоке 10 и

имеет вид

$$\begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_2 \end{bmatrix}.$$

В сумматоре (блок 11) происходит суммирование матрицы активных сопротивлений статора и ротора и матрицы сопротивлений поврежденных стержней, в итоге чего получается полная матрица сопротивлений

$$\begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_2 + R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_2 + R \end{bmatrix}.$$

В блоке 12 происходит определение матрицы падений напряжений на активных сопротивлениях и имеет следующий вид

$$\begin{bmatrix} I_{s1} \cdot R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{sm} \cdot R_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{r1} \cdot (R_2 + R) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{rm} \cdot (R_2 + R) \end{bmatrix}.$$

В блоке 13 происходит определение матрицы напряжений в фазах с учетом падений напряжений на активных сопротивлениях.

В блоке 14 определение потокосцеплений в фазах посредством интегрирования напряжений в фазах, в котором θ_e – это электрический угол поворота вала двигателя и определяется по следующей формуле

$$\theta_e = \int \omega_e dt = z_p \cdot \int \omega dt.$$

Блоки 15 и 16 – это матрицы индуктивностей статора и ротора соответственно.

Блок 17 содержит значение взаимной индуктивности.

Блок 18 формирует угол между стержнями ротора.

В блоке 19 определяется вектор токов с использованием потокосцепления, электрического угла поворота, матрицы индуктивностей статора и ротора, взаимной индуктивности и угла между стержнями ротора

$$[I] = [L]^{-1} \cdot [\Psi],$$

где $[L] = \begin{bmatrix} [L_s] & [L_{rs}] \\ [L_{rs}] & [L_r] \end{bmatrix}$.

При этом вектор потокосцеплений подается на блок 20, где он разделяется на вектора потокосцеплений статора и ротора. Далее в блоке 21 происходит преобразование вектора потокосцепления статора в многофазной системе координат в вектор потокосцепления в трехфазной системе координат с использованием блока 22, где задается количество фаз статора вектором $(n \times 1)$, где n – число фаз в статоре.

На выходе №1 получается вектор потокосцеплений статора в трехфазной системе координат.

На выходе №2 получается вектор потокосцеплений ротора в многофазной системе координат.

В блоке 23 происходит определение электромагнитного момента, развиваемого двигателем, при этом на блок 23 подаются данные вектора токов, число пар полюсов (блок 24), электрический угол поворота вала двигателя, взаимная индуктивность и угол между стержнями ротора. Кроме этого, в блоке 23 происходит разделение вектора токов на вектор статорных токов и вектор роторных токов в многофазной системе координат.

В блоке 25 происходит преобразование вектора токов статора из многофазной системы координат в трехфазную систему координат, посредством блока 22.

Далее определяется скорость вращения вала двигателя по формуле

$$\frac{d\omega_r}{dt} = \frac{z_p \cdot (M_e - M_c)}{J}.$$

Затем определяется γ – электрический угол поворота вала двигателя по формуле $\gamma_e = z_p \cdot \int \omega dt$.

Выход 3 – вектор тока статора в трехфазной системе координат.

Выход 4 – вектор тока ротора в многофазной системе координат.

Выход 5 – электромагнитный момент двигателя.

Выход 6 – скорость вращения вала двигателя.

Результаты моделирования пуска АД АИР90L4У3 и эксперимента показаны на рис. 18, а результаты моделирования тока фазы статора при обрыве стержня короткозамкнутой обмотки ротора АД АИР90L4У3 приведены на рис. 19.

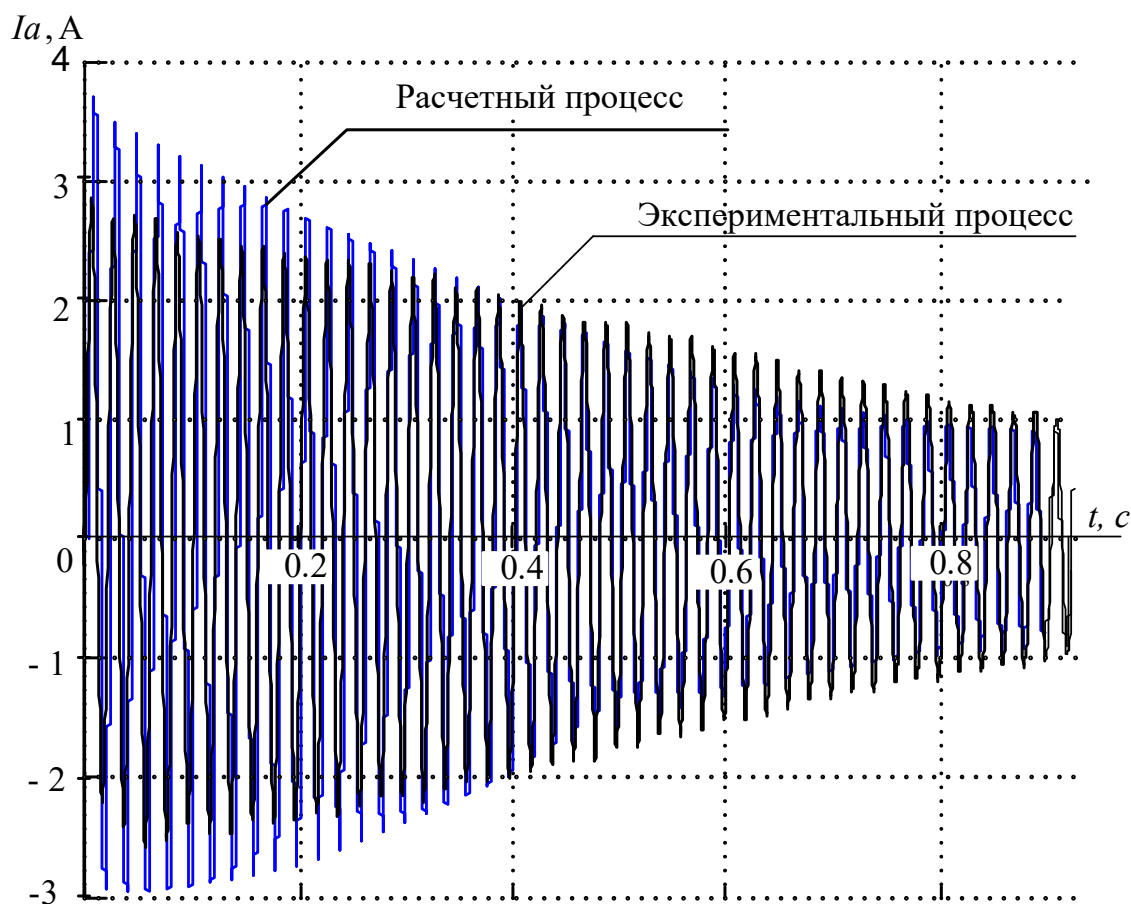


Рисунок 18 – Результаты моделирования и эксперимента тока фазы статора при пуске АД на холостой ход. Здесь синяя кривая – результаты расчета; черная кривая – результаты эксперимента

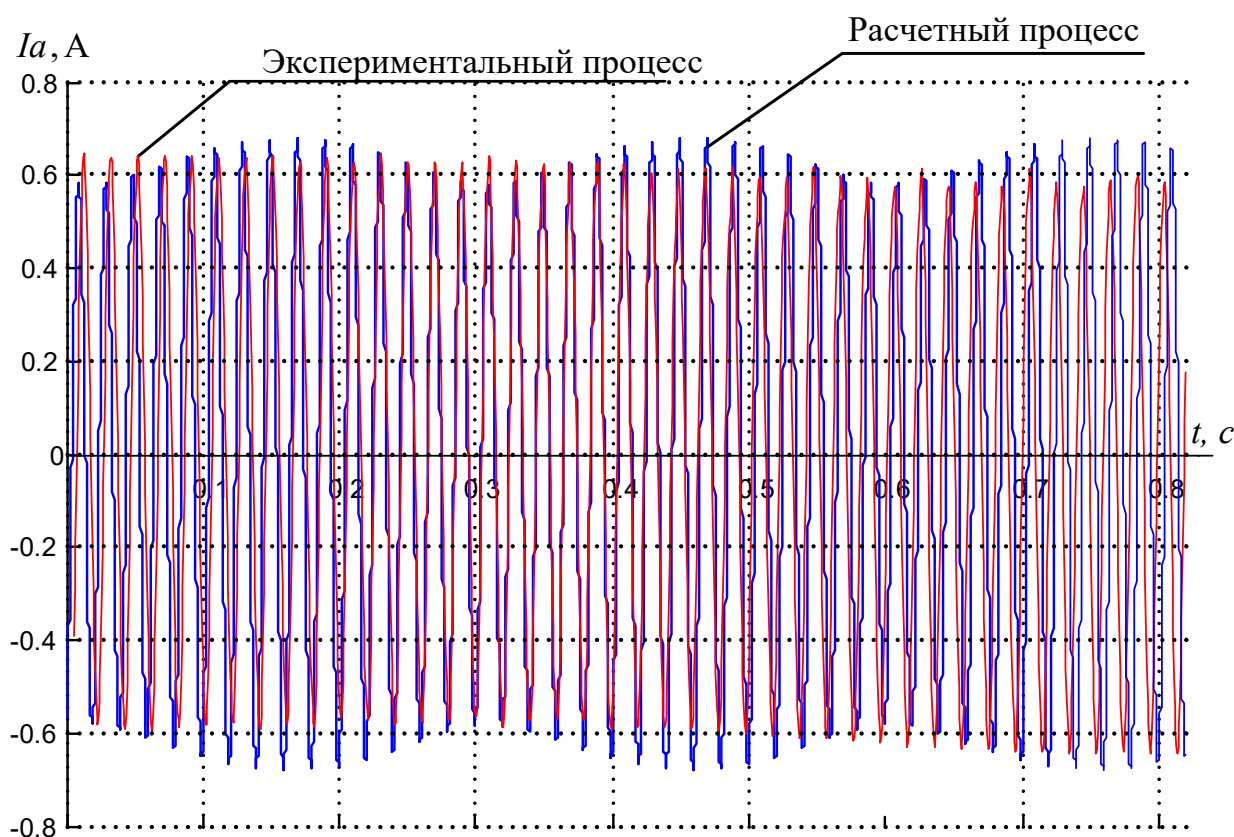


Рисунок 19 – Результаты моделирования и эксперимента тока фазы статора в нормально нагруженном режиме при обрыве стержня «беличьей клетки»
Здесь синяя кривая – результаты расчета; красная кривая – результаты эксперимента

В результате верификации математической модели установлено, что погрешность при моделировании пуска не превышает 15 %, а в нормально нагруженном режиме при обрыве стержня «беличьей клетки» находится на уровне 7 ... 10 %. Это вполне удовлетворяет требованиям к адекватности математического моделирования при разработке устройств функциональной диагностики АД.

2.2.1 Математическое моделирование роторной цепи

Математическая модель АД в многофазной системе координат реализована в среде графического программирования и анализа Simulink, являющимся приложением пакета прикладных программ MatLab [5].

Основные элементы блок-схемы имитационной модели АД в многофазной

системе координат представлены на рис. 20, при этом, для обеспечения наиболее приемлемых расчетных показателей в качестве основного метода разрешения дифференциальных уравнений был выбран метод Рунге-Кутты 4-го порядка с шагом расчета 0,00002 с.

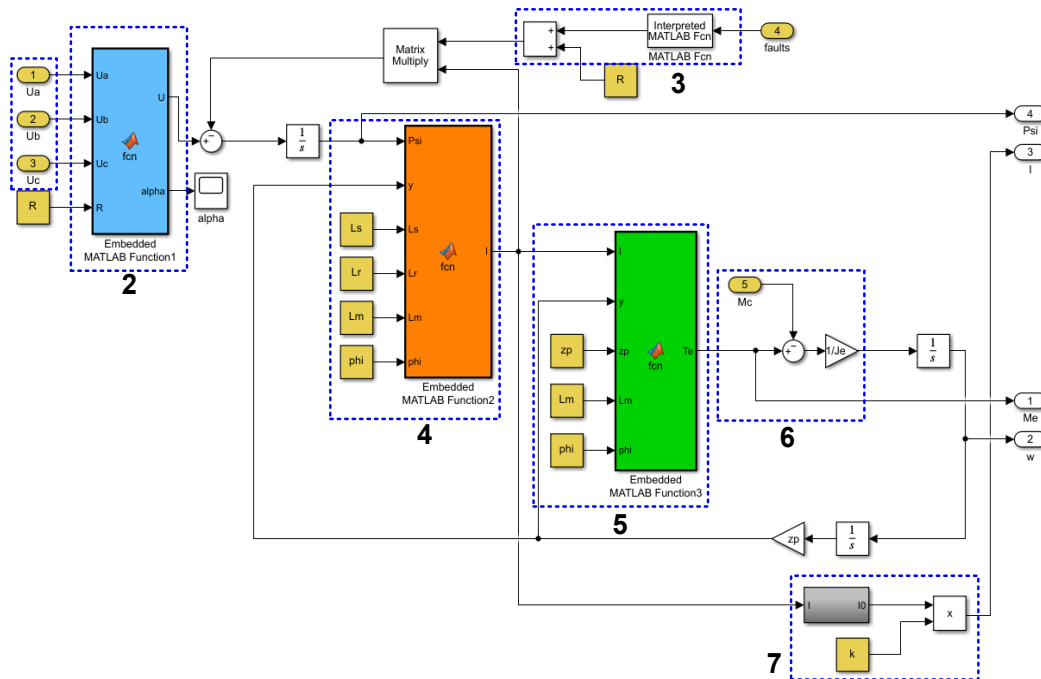


Рисунок 20 - Блок-схема имитационной модели АД в среде Matlab Simulink

На вход подаются трехфазные синусоидальные напряжения, которые сдвинуты между собой на 120 градусов. Затем с помощью блока 2 мгновенные напряжения преобразуются из трехфазной системы координат в многофазную по выражению (19). В блоке 4 осуществляется расчет токов статора и ротора на основе системы дифференциальных уравнений (25), а в блоке 5 расчет момента двигателя. Блоки 2, 4 и 5 построены на основе программных функций. Далее в блоке 6, на основе полученного момента двигателя определяется угловая скорость вала ротора по дифференциальному уравнению (27). Данные о скорости используются для определения угла, который необходим для вычисления взаимных индуктивностей в блоке 4. В блоке 3 задаются добавочные сопротивления, имитирующие обрыв стержня ротора.

На рис. 21 представлены кривые токов в роторных цепях при количестве стержней $n = 12$ и токи трех фаз статора в пусковых режимах.

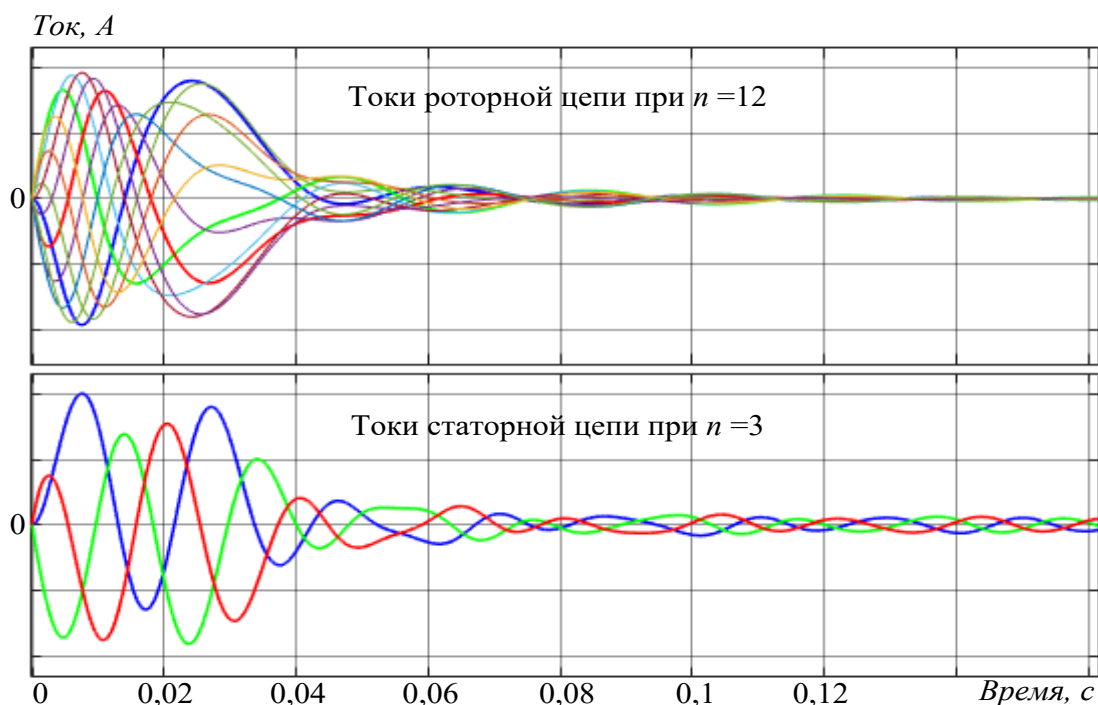


Рисунок 21 – Кривые токов статорной и роторной цепей

Ключевым моментом, характеризующим адекватность полученных результатов является снижение частоты тока всех фаз роторной цепи, что характерно короткозамкнуты асинхронным двигателям.

2.3 Определение частоты вращения и скольжения АД

Скольжение является важной характеристикой режима работы асинхронного двигателя (АД). Наиболее часто скольжение s определяют по формуле (29) при известных значениях частоты вращения поля статора n_c и частоты вращения вала ротора n_p :

$$s = (n_c - n_p) / n_c. \quad (30)$$

Частота вращения поля статора жестко связана с частотой питающей сети f_c и числом пар полюсов двигателя z_p :

$$n_c = \frac{60 \cdot f_c}{z_p}.$$

В то же время, частота вращения поля ротора зависит от механической

нагрузки на валу АД и является величиной переменной. Именно поэтому в асинхронном электроприводе для определения числа оборотов ротора широко используются датчики частоты вращения (ДЧВ) – тахогенераторные или фотоэлектрические, установленные на валу двигателя.

Использование ДЧВ установленного на валу двигателя сопряжено как с дополнительными эксплуатационными трудностями, так и приводит к снижению надежности функциональной системы диагностики повреждений в обмотке короткозамкнутого ротора АД. Одним из путей решения данной проблемы является переход на бесконтактные способы измерения частоты вращения вала ротора, так и частоты токов в «беличьей клетке».

При проведении исследования скольжение определялось на основе известного отношения

$$s_1 = f_{p1} / f_c \quad (31)$$

где s – скольжение, f_p – частота тока в роторе. Индексами 1–4, здесь и далее в формулах различают способ определения координаты АД, таких как скольжение, частота тока ротора и частота вращения ротора АД. Поскольку непосредственно измерить частоту тока в короткозамкнутом роторе невозможно, то для ее определения применялся гармонический анализ токов статора.

Угловая скорость вращения ротора и скольжение определялись по спектральному составу тока (токов) в обмотке (обмотках) статора. Известен эффект модуляции тока статора вращающимся магнитным полем ротора. Согласно теории амплитудной модуляции в токе статора появляются спектральные составляющие, как гармониками от частоты питающей сети f_c , так и с частотами верхних f_v и нижних f_n боковых полос. Для иллюстрации проявления эффекта модуляции на рис. 22 приведена амплитудно-частотная характеристика тока статора АД.

Было обосновано наличие определенной связи между частотой f_p и частотой одной из составляющих тока статора. Предварительные исследования

проведены на компьютеризированном лабораторном электромеханическом стенде.

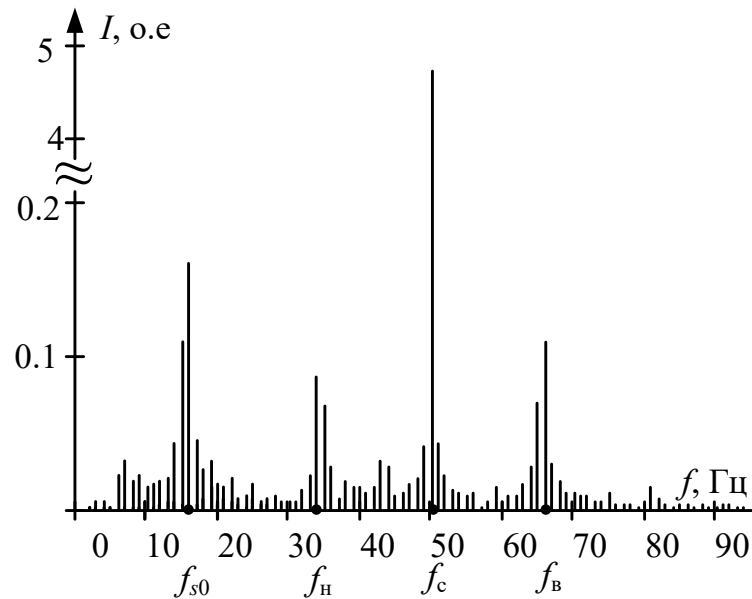


Рисунок 22 – Амплитудно-частотная характеристика тока в обмотке статора АД при минимальном моменте нагрузки ($p = 3$)

Запись результатов исследований проводилась в течение 1 сек. с частотой дискретизации 1600 Гц. Таким образом, с помощью восьми каналов стало возможным измерять: три фазных тока статора; три фазных напряжения статора; частоту вращения ротора (сигнал на выходе ДЧВ); фазный ток ротора и фазное напряжение ротора.

На рис. 23 приведены осциллограммы токов статора i_c , ротора i_p и сигнала на выходе ДЧВ $n_{рд}$.

В развитие идей работы [6-9] для рассматриваемого случая также рассчитывался модуль обобщенного вектора тока статора:

$$i_s = \sqrt{\frac{2}{3}(i_{cA}^2 + i_{cB}^2 + i_{cC}^2)},$$

где: i_{cA} , i_{cB} , i_{cC} – мгновенные значения токов обмоток статора. Осциллограмма $i_s(t)$ без учета постоянной составляющей приведена на рис. 24.

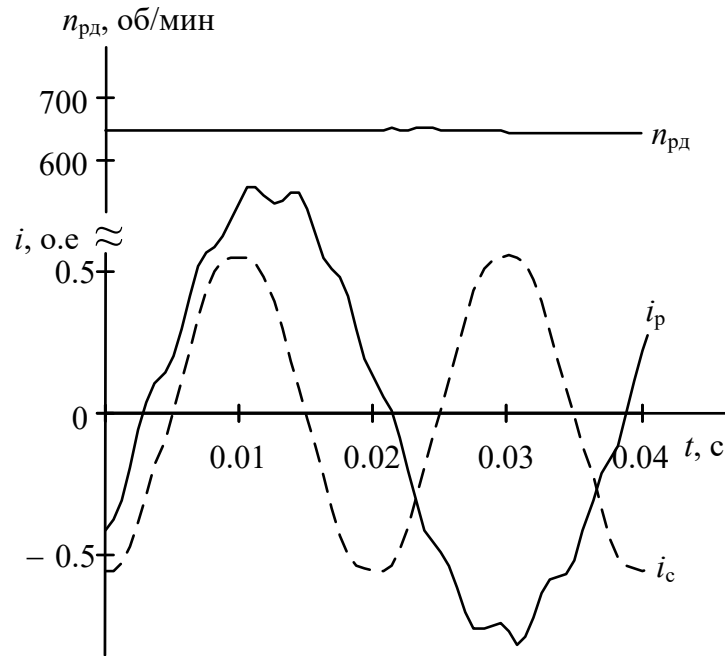


Рисунок 23 – Осциллограммы $i_c(t)$, $i_p(t)$, $n_{рд}(t)$ при шаге дискретизации $\Delta t = 0,000625$ с, минимальном моменте нагрузки $M_c \cong 0$, введенном в цепь ротора добавочном сопротивлении $R_d = 20$ Ом

Массивы мгновенных значений токов и напряжений, полученные в ходе описанных выше исследований, были использованы при гармоническом анализе с использованием дискретного преобразования Фурье (ДПФ) при заведомо большом периоде $T = 1$ с; по результатам ДПФ построены приведенные на рис. 25. амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) токов $i_c(t)$, $i_p(t)$, $i_s(t)$.

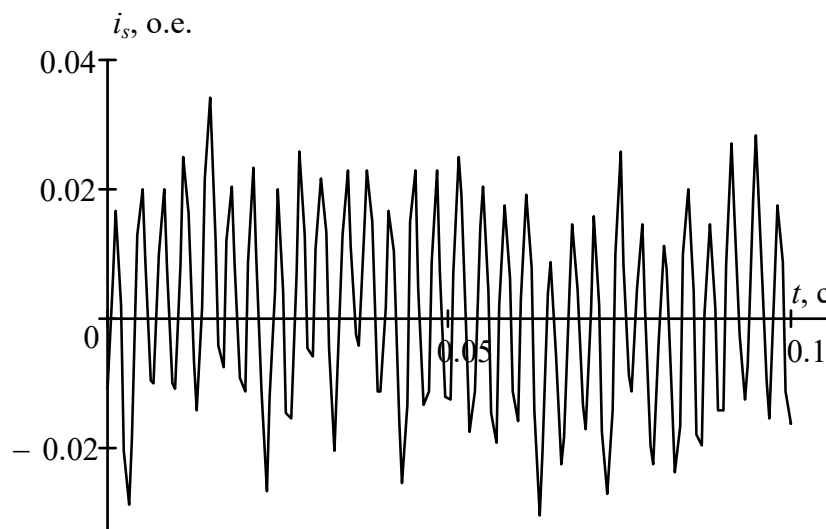
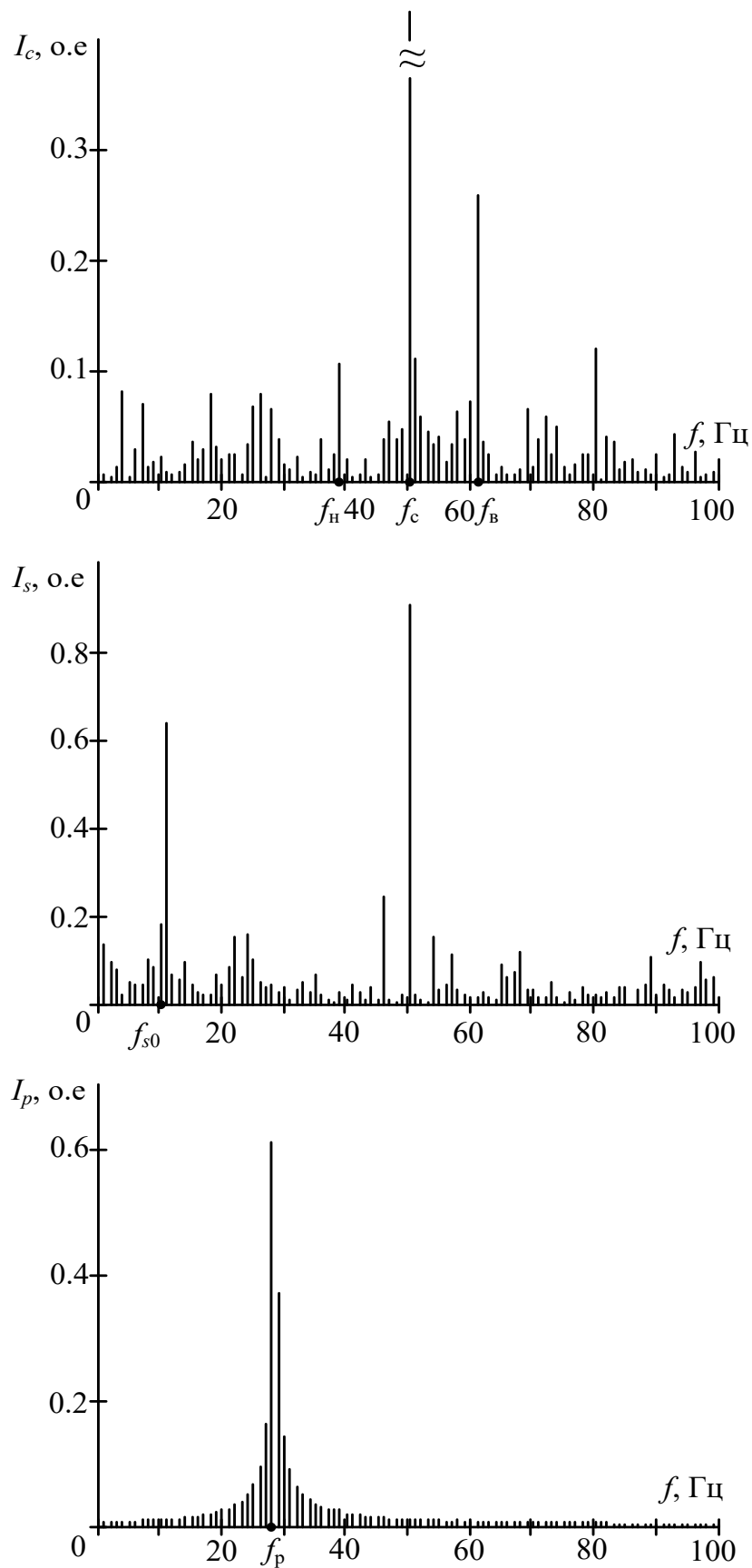


Рисунок 24 – Осциллограмма модуля обобщенного вектора тока статора при моменте нагрузки $M_c \cong 0$

Рисунок 25 – Амплитудно-частотные характеристики токов $i_c(t)$, $i_s(t)$, $i_p(t)$

Анализ характеристик позволил установить связь между частотой основной составляющей тока ротора f_p , частотой питающей сети f_c , частотами f_{s0} , f_b , f_h :

$$f_{p2} = f_c - 2 \cdot (f_b - f_c); f_{p3} = f_c - 2 \cdot (f_c - f_h); f_{p4} = f_c - 2 \cdot f_{s0} \quad (32)$$

Соответственно из (32) можно найти и скольжение АД, воспользовавшись формулой (32). При этом получим:

$$s_2 = 3 - 2 \frac{f_b}{f_c}; s_3 = 2 \frac{f_h}{f_c} - 1; s_4 = 1 - 2 \cdot \frac{f_{s0}}{f_c} \quad (33)$$

При найденном скольжении (33) очевидным образом рассчитываются частоты вращения ротора АД:

$$n_{p2} = n_c \cdot (1 - s_2); n_{p3} = n_c \cdot (1 - s_3); n_{p4} = n_c \cdot (1 - s_4) \quad (34)$$

Число оборотов ротора рассчитывается по формуле:

$$n_p = n_c \cdot (1 - s).$$

В табл. 1 приведены результаты расчета частот тока f_{p2} , f_{p3} , f_{p4} , скольжения и числа оборотов ротора по (32, 33, 34) для нескольких характерных случаев. Результаты подтверждают работоспособность предлагаемых формул.

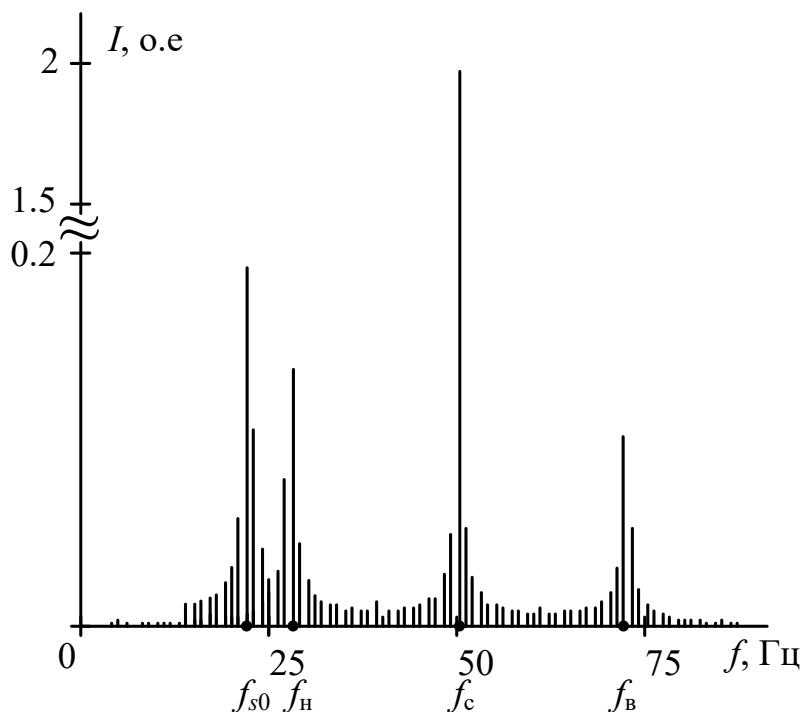
Таблица 1 – Результаты расчетов

	f_{p1}	f_h	f_b	f_{s0}	f_{p2}	f_{p3}	f_{p4}	s_1	s_2	s_3	s_4	$n_{p2,3,4}$	$n_{рд}$
	Гц	Гц	Гц	Гц	Гц	Гц	Гц	о.е.	о.е.	о.е.	о.е.	об/мин	об/мин
$M_c=0$	28	39	61	11	28	28	28	0,56	0,56	0,56	0,56	660	643
$M_c>0$	46	-	52	2	-	46	46	-	0,92	0,92	0,92	120	124

Окончательная проверка приведенных выше процедур и новых решений была проведена на нескольких заводских образцах АД с короткозамкнутым ротором (тип 1, тип 2). Результаты исследований приведены в табл. 2.

Таблица 2 – Результаты исследований

	f_H	f_B	f_{s0}	f_{p2}	f_{p3}	f_{p4}	s_2	s_3	s_4	n_p
	Гц	Гц	Гц	Гц	Гц	Гц	о.е.	о.е.	о.е.	об/мин
АД, тип 1	28	72	22	6	6	6	0,12	0,12	0,12	1320
АД, тип 2	34	66	16	18	18	18	0,36	0,36	0,36	480

Рисунок 26 – АЧХ тока статора АД при моменте нагрузки $M_c > 0$ ($p = 2$)

Экспериментальные исследования подтвердили работоспособность предложенного бездатчикового метода измерения скорости вала АД и частоты тока в короткозамкнутой обмотке.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной работе проведено комплексное исследование, направленное на развитие теории математического моделирования электрических машин синхронных и асинхронных с целью совершенствования методов их технической диагностики, в частности, для выявления внутренних повреждений обмоток ротора.

Для синхронных машин разработана усовершенствованная математическая модель, учитывающая витковые замыкания в обмотке ротора. Модель построена в естественной системе координат и описана системами дифференциальных уравнений, что позволяет адекватно отражать электромагнитные процессы как в нормальных, так и в аварийных режимах. Предложен подход к переходу от непрерывных дифференциальных уравнений к дискретной алгебраической форме с использованием билинейного преобразования (метод Тастина), что обеспечивает устойчивость численного решения и возможность эффективной реализации на современных цифровых сигнальных процессорах. Разработаны методы моделирования магнитных полей в торцевой зоне синхронной машины, включая поля рассеяния от обмоток статора и ротора, поле воздушного зазора и поле торцевого щита. Применение метода зеркальных отражений с коррекцией токов позволило с приемлемой точностью (погрешность 2–20%) рассчитывать распределение магнитной индукции, что является основой для создания высокочувствительных датчиков магнитного поля (ДМП), используемых в диагностических системах.

Для асинхронных машин с короткозамкнутым ротором предложена многофазная математическая модель в фазных координатах, позволяющая учитывать повреждения типа обрыва стержней «беличьей клетки». Модель реализована в среде MATLAB/Simulink и верифицирована экспериментально, показав погрешность моделирования в пределах 7–15%, что соответствует требованиям к задачам диагностики. Разработан бездатчиковый метод определения частоты вращения и скольжения АД на основе спектрального

анализа токов статора. Метод основан на выявлении связей между гармоническими составляющими токов статора и частотой тока ротора, что позволяет отказаться от применения датчиков скорости и повысить надежность диагностической системы.

Результаты исследований имеют существенное прикладное значение для создания современных систем технической диагностики и релейной защиты ЭМ. Предложенные модели и алгоритмы позволяют осуществлять раннее выявление таких скрытых дефектов, как витковые замыкания и обрывы стержней, разрабатывать более чувствительные и селективные устройства защиты, интегрировать диагностические функции в автоматизированные системы управления технологическими процессами.

Дальнейшие исследования могут быть направлены на развитие предложенных методов с использованием технологий искусственного интеллекта, адаптацию моделей для машин специального назначения, а также на создание унифицированных программно-аппаратных комплексов для непрерывного мониторинга состояния электрических машин.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ибрагимов Н.Х. Практический курс дифференциальных уравнений и математического моделирования. / Перевод с англ. И.С. Емельяновой. Нижний Новгород: Издательство Нижегородского госуниверситета. 2007 г. 432 с.
2. Новожилов А.Н., Полищук В.И. Способ защиты от витковых замыканий в обмотке ротора синхронного генератора // Вестник Павлодарского государственного университета. Сер. Энергетическая. – 2007. – № 2. – С. 53-59.
3. Вольдек А.И., Данилевич Я.Б., Косачевский В.И., Яковлев В.И. Электрические процессы в торцевых частях электрических машин. – Л.: Атомиздат, 1983. – 212 с.
4. Сивокобыленко В.Ф. Математическое моделирование электродвигателей собственных нужд. – Донецк: ДПИ, 1979. – 315 с.
5. Лазарев Ю. Моделирование процессов и систем в MATLAB. – Санкт-Петербург. Издательство «Питер», 2005. – 511 с.
6. Гармаш В.С. Метод контроля исправности стержней ротора короткозамкнутого асинхронного двигателя // Изв. вузов. Энергетика. 1990. №10. С. 50-52.
7. Баннов Д.М., Полищук В.И. Диагностика внутренних повреждений вращающихся частей электрических машин на основе анализа токов статора: монография. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2024. – 123 с.
8. Баннов Д.М., Полищук В.И. Метод обработки сигналов токов статора асинхронного двигателя для диагностики обрыва стержня ротора // Вестник Ивановского государственного энергетического университета. – 2024. № 4. – С. 64-72.
9. Баннов Д.М., Полищук В.И. Применение микропроцессорного блока релейной защиты для диагностирования внутренних повреждений электрооборудования электроустановок // iPolitech Journal. 2024. Т. 28. № 4. С. 521-533. – DOI: 10.21285/1814-3520-2024-4-521-533.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Этапы приведения дискретной модели к явному виду путем аналитического обращения матрицы \mathbf{A} собственной динамики электромагнитной подсистемы синхронной машины

Для нахождения аналитического решения обратной матрицы воспользуемся методом присоединенной (союзной) матрицы. Если $|\mathbf{A}| \neq 0$, то

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \tilde{\mathbf{A}}^T, \text{ где } \tilde{\mathbf{A}} - \text{союзная матрица.}$$

Исходя из физического смысла решаемой задачи условие $|\mathbf{A}| \neq 0$ всегда выполняется, т.е. на каждой итерации текущее значение вектора переменных состояния будет отличаться от предыдущего как в переходных, так и в установившихся режимах.

Найдем определитель матрицы \mathbf{A} :

$$|\mathbf{A}| = A_{11} \cdot |\mathbf{C}_1| + A_{12} \cdot |\mathbf{C}_2| + A_{13} \cdot |\mathbf{C}_3| + A_{14} \cdot |\mathbf{C}_4| + A_{15} \cdot |\mathbf{C}_5| \quad (\text{П.1})$$

где

$$\mathbf{C}_1 = \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix}, \mathbf{C}_2 = \begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ A_{31} & A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ A_{41} & A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ A_{51} & A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix}, \mathbf{C}_3 = \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{24} & A_{25} \\ A_{31} & A_{32} & A_{34} & A_{35} \\ A_{41} & A_{42} & A_{44} & A_{45} \\ A_{51} & A_{52} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix},$$

$$\mathbf{C}_4 = \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{25} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{35} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{45} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{55} \end{vmatrix}, \mathbf{C}_5 = \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} \end{vmatrix}.$$

Найдем определитель матрицы C_1 :

$$|C_1| = \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} = A_{22} \cdot \begin{vmatrix} A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} + A_{23} \cdot \begin{vmatrix} A_{32} & A_{34} & A_{35} \\ A_{42} & A_{44} & A_{45} \\ A_{52} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} + \\ + A_{24} \cdot \begin{vmatrix} A_{32} & A_{33} & A_{35} \\ A_{42} & A_{43} & A_{45} \\ A_{52} & A_{53} & A_{55} \end{vmatrix} + A_{25} \cdot \begin{vmatrix} A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{42} & A_{43} & A_{44} \\ A_{52} & A_{53} & A_{54} \end{vmatrix} \quad (\text{П.2})$$

Для нахождения определителя матрицы воспользуемся методом треугольника:

$$\begin{vmatrix} A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} = A_{33} \cdot A_{44} \cdot A_{55} + A_{53} \cdot A_{34} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{43} \cdot A_{54} - \\ - A_{35} \cdot A_{44} \cdot A_{53} - A_{33} \cdot A_{54} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{43} \cdot A_{34} \\ \begin{vmatrix} A_{32} & A_{34} & A_{35} \\ A_{42} & A_{44} & A_{45} \\ A_{52} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} = A_{32} \cdot A_{44} \cdot A_{55} + A_{52} \cdot A_{34} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{42} \cdot A_{54} - \\ - A_{35} \cdot A_{44} \cdot A_{52} - A_{32} \cdot A_{54} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{42} \cdot A_{34} \\ \begin{vmatrix} A_{32} & A_{33} & A_{35} \\ A_{42} & A_{43} & A_{45} \\ A_{52} & A_{53} & A_{55} \end{vmatrix} = A_{32} \cdot A_{43} \cdot A_{55} + A_{52} \cdot A_{33} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{42} \cdot A_{53} - \\ - A_{35} \cdot A_{43} \cdot A_{52} - A_{32} \cdot A_{53} \cdot A_{45} \\ \begin{vmatrix} A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{42} & A_{43} & A_{44} \\ A_{52} & A_{53} & A_{54} \end{vmatrix} = A_{32} \cdot A_{43} \cdot A_{54} + A_{52} \cdot A_{33} \cdot A_{44} + A_{34} \cdot A_{42} \cdot A_{53} - \\ - A_{34} \cdot A_{43} \cdot A_{52} - A_{32} \cdot A_{53} \cdot A_{44} - A_{54} \cdot A_{42} \cdot A_{33} \quad (\text{П.3})$$

Аналитическое выражение для расчёта определителя матрицы C_1 :

$$\begin{aligned}
 |C_1| = & A_{22} \cdot (A_{33} \cdot A_{44} \cdot A_{55} + A_{53} \cdot A_{34} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{43} \cdot A_{54} - A_{35} \cdot A_{44} \cdot A_{53} - \\
 & - A_{33} \cdot A_{54} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{43} \cdot A_{34}) + A_{23} \cdot (A_{32} \cdot A_{44} \cdot A_{55} + A_{52} \cdot A_{34} \cdot A_{45} + \\
 & + A_{35} \cdot A_{42} \cdot A_{54} - A_{35} \cdot A_{44} \cdot A_{52} - A_{32} \cdot A_{54} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{42} \cdot A_{34}) + \\
 & + A_{24} (A_{32} \cdot A_{43} \cdot A_{55} + A_{52} \cdot A_{33} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{42} \cdot A_{53} - A_{35} \cdot A_{43} \cdot A_{52} - \\
 & - A_{32} \cdot A_{53} \cdot A_{45}) + A_{25} (A_{32} \cdot A_{43} \cdot A_{54} + A_{52} \cdot A_{33} \cdot A_{44} + \\
 & + A_{34} \cdot A_{42} \cdot A_{53} - A_{34} \cdot A_{43} \cdot A_{52} - A_{32} \cdot A_{53} \cdot A_{44} - A_{54} \cdot A_{42} \cdot A_{33})
 \end{aligned} \tag{П.4}$$

Определитель матрицы C_2 :

$$\begin{aligned}
 |C_2| = & \begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ A_{31} & A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ A_{41} & A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ A_{51} & A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} = A_{21} \cdot \begin{vmatrix} A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} + A_{23} \cdot \begin{vmatrix} A_{31} & A_{34} & A_{35} \\ A_{41} & A_{44} & A_{45} \\ A_{51} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} + \\
 & + A_{24} \cdot \begin{vmatrix} A_{31} & A_{33} & A_{35} \\ A_{41} & A_{43} & A_{45} \\ A_{51} & A_{53} & A_{55} \end{vmatrix} + A_{25} \begin{vmatrix} A_{31} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{43} & A_{44} \\ A_{51} & A_{53} & A_{54} \end{vmatrix}
 \end{aligned} \tag{П.5}$$

Для нахождения определителя матрицы воспользуемся методом треугольника:

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} = A_{33} \cdot A_{44} \cdot A_{55} + A_{53} \cdot A_{34} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{43} \cdot A_{54} - \\
 & - A_{35} \cdot A_{44} \cdot A_{53} - A_{33} \cdot A_{54} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{43} \cdot A_{34} \\
 & \begin{vmatrix} A_{31} & A_{34} & A_{35} \\ A_{41} & A_{44} & A_{45} \\ A_{51} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} = A_{31} \cdot A_{44} \cdot A_{55} + A_{51} \cdot A_{34} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{41} \cdot A_{54} - \\
 & - A_{35} \cdot A_{44} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{54} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{41} \cdot A_{34} \\
 & \begin{vmatrix} A_{31} & A_{33} & A_{35} \\ A_{41} & A_{43} & A_{45} \\ A_{51} & A_{53} & A_{55} \end{vmatrix} = A_{31} \cdot A_{43} \cdot A_{55} + A_{51} \cdot A_{33} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{41} \cdot A_{53} - \\
 & - A_{35} \cdot A_{43} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{53} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{41} \cdot A_{33}
 \end{aligned} \tag{П.6}$$

$$\begin{vmatrix} A_{31} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{43} & A_{44} \\ A_{51} & A_{53} & A_{54} \end{vmatrix} = A_{31} \cdot A_{43} \cdot A_{54} + A_{51} \cdot A_{33} \cdot A_{44} + A_{34} \cdot A_{41} \cdot A_{53} - \\ - A_{34} \cdot A_{43} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{53} \cdot A_{44} - A_{54} \cdot A_{41} \cdot A_{33}$$

Аналитическое выражение для расчёта определителя матрицы \mathbf{C}_2 :

$$\begin{aligned} |\mathbf{C}_2| = & A_{21}(A_{33} \cdot A_{44} \cdot A_{55} + A_{53} \cdot A_{34} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{43} \cdot A_{54} - A_{35} \cdot A_{44} \cdot A_{53} - \\ & - A_{33} \cdot A_{54} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{43} \cdot A_{34}) + A_{23}(A_{31} \cdot A_{44} \cdot A_{55} + A_{51} \cdot A_{34} \cdot A_{45} + \\ & + A_{35} \cdot A_{41} \cdot A_{54} - A_{35} \cdot A_{44} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{54} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{41} \cdot A_{34}) + \\ & + A_{24}(A_{31} \cdot A_{43} \cdot A_{55} + A_{51} \cdot A_{33} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{41} \cdot A_{53} - A_{35} \cdot A_{43} \cdot A_{51} - \\ & - A_{31} \cdot A_{53} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{41} \cdot A_{33}) + A_{25}(A_{31} \cdot A_{43} \cdot A_{54} + A_{51} \cdot A_{33} \cdot A_{44} + \\ & + A_{34} \cdot A_{41} \cdot A_{53} - A_{34} \cdot A_{43} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{53} \cdot A_{44} - A_{54} \cdot A_{41} \cdot A_{33}) \end{aligned} \quad (\text{П.7})$$

Определитель матрицы \mathbf{C}_3 :

$$\begin{aligned} |\mathbf{C}_3| = & \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{24} & A_{25} \\ A_{31} & A_{32} & A_{34} & A_{35} \\ A_{41} & A_{42} & A_{44} & A_{45} \\ A_{51} & A_{52} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} = A_{21} \cdot \begin{vmatrix} A_{32} & A_{34} & A_{35} \\ A_{42} & A_{44} & A_{45} \\ A_{52} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} + A_{22} \cdot \begin{vmatrix} A_{31} & A_{34} & A_{35} \\ A_{41} & A_{44} & A_{45} \\ A_{51} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} + \\ & + A_{24} \cdot \begin{vmatrix} A_{31} & A_{32} & A_{35} \\ A_{41} & A_{42} & A_{45} \\ A_{51} & A_{52} & A_{55} \end{vmatrix} + A_{25} \begin{vmatrix} A_{31} & A_{32} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{44} \\ A_{51} & A_{52} & A_{54} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (\text{П.8})$$

Для нахождения определителя матрицы воспользуемся методом треугольника:

$$\begin{vmatrix} A_{32} & A_{34} & A_{35} \\ A_{42} & A_{44} & A_{45} \\ A_{52} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} = A_{32} \cdot A_{44} \cdot A_{55} + A_{52} \cdot A_{34} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{42} \cdot A_{54} - \\ - A_{35} \cdot A_{44} \cdot A_{52} - A_{32} \cdot A_{54} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{42} \cdot A_{34}$$

$$\begin{vmatrix} A_{31} & A_{34} & A_{35} \\ A_{41} & A_{44} & A_{45} \\ A_{51} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} = A_{31} \cdot A_{44} \cdot A_{55} + A_{51} \cdot A_{34} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{41} \cdot A_{54} - \\ - A_{35} \cdot A_{44} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{54} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{41} \cdot A_{34}$$

$$\begin{vmatrix} A_{31} & A_{32} & A_{35} \\ A_{41} & A_{42} & A_{45} \\ A_{51} & A_{52} & A_{55} \end{vmatrix} = A_{31} \cdot A_{42} \cdot A_{55} + A_{51} \cdot A_{32} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{41} \cdot A_{52} - \\ - A_{35} \cdot A_{42} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{52} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{41} \cdot A_{32} \quad (\text{П.9})$$

$$\begin{vmatrix} A_{31} & A_{32} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{44} \\ A_{51} & A_{52} & A_{54} \end{vmatrix} = A_{31} \cdot A_{42} \cdot A_{54} + A_{51} \cdot A_{32} \cdot A_{44} + A_{34} \cdot A_{41} \cdot A_{52} - \\ - A_{34} \cdot A_{42} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{52} \cdot A_{44} - A_{54} \cdot A_{41} \cdot A_{32}$$

Аналитическое выражение для расчёта определителя матрицы \mathbf{C}_3 :

$$\begin{aligned} |\mathbf{C}_3| &= A_{21}(A_{32} \cdot A_{44} \cdot A_{55} + A_{52} \cdot A_{34} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{42} \cdot A_{54} - A_{35} \cdot A_{44} \cdot A_{52} - \\ &- A_{32} \cdot A_{54} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{42} \cdot A_{34}) + A_{22}(A_{31} \cdot A_{44} \cdot A_{55} + A_{51} \cdot A_{34} \cdot A_{45} + \\ &+ A_{35} \cdot A_{41} \cdot A_{54} - A_{35} \cdot A_{44} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{54} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{41} \cdot A_{34}) + \\ &+ A_{24}(A_{31} \cdot A_{42} \cdot A_{55} + A_{51} \cdot A_{32} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{41} \cdot A_{52} - A_{35} \cdot A_{42} \cdot A_{51} - \\ &- A_{31} \cdot A_{52} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{41} \cdot A_{32}) + A_{25}(A_{31} \cdot A_{42} \cdot A_{54} + A_{51} \cdot A_{32} \cdot A_{44} + \\ &+ A_{34} \cdot A_{41} \cdot A_{52} - A_{34} \cdot A_{42} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{52} \cdot A_{44} - A_{54} \cdot A_{41} \cdot A_{32}) \end{aligned} \quad (\text{П.10})$$

Определитель матрицы \mathbf{C}_4 :

$$\begin{aligned} |\mathbf{C}_4| &= \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{25} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{35} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{45} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{55} \end{vmatrix} = A_{21} \cdot \begin{vmatrix} A_{32} & A_{33} & A_{35} \\ A_{42} & A_{43} & A_{45} \\ A_{52} & A_{53} & A_{55} \end{vmatrix} + A_{22} \cdot \begin{vmatrix} A_{31} & A_{33} & A_{35} \\ A_{41} & A_{43} & A_{45} \\ A_{51} & A_{53} & A_{55} \end{vmatrix} + \\ &+ A_{23} \cdot \begin{vmatrix} A_{31} & A_{32} & A_{35} \\ A_{41} & A_{42} & A_{45} \\ A_{51} & A_{52} & A_{55} \end{vmatrix} + A_{25} \cdot \begin{vmatrix} A_{31} & A_{32} & A_{33} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (\text{П.11})$$

Для нахождения определителя матрицы воспользуемся методом треугольника:

$$\begin{vmatrix} A_{32} & A_{33} & A_{35} \\ A_{42} & A_{43} & A_{45} \\ A_{52} & A_{53} & A_{55} \end{vmatrix} = A_{32} \cdot A_{43} \cdot A_{55} + A_{52} \cdot A_{33} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{42} \cdot A_{53} - \\ - A_{35} \cdot A_{43} \cdot A_{52} - A_{32} \cdot A_{53} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{42} \cdot A_{33}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} A_{31} & A_{33} & A_{35} \\ A_{41} & A_{43} & A_{45} \\ A_{51} & A_{53} & A_{55} \end{vmatrix} = A_{31} \cdot A_{43} \cdot A_{55} + A_{51} \cdot A_{33} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{41} \cdot A_{53} - \\
& - A_{35} \cdot A_{43} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{53} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{41} \cdot A_{33} \\
& \begin{vmatrix} A_{31} & A_{32} & A_{35} \\ A_{41} & A_{42} & A_{45} \\ A_{51} & A_{52} & A_{55} \end{vmatrix} = A_{31} \cdot A_{42} \cdot A_{55} + A_{51} \cdot A_{32} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{41} \cdot A_{52} - \\
& - A_{35} \cdot A_{42} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{52} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{41} \cdot A_{32} \\
& \begin{vmatrix} A_{31} & A_{32} & A_{33} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} \end{vmatrix} = A_{31} \cdot A_{42} \cdot A_{53} + A_{51} \cdot A_{32} \cdot A_{43} + A_{33} \cdot A_{41} \cdot A_{52} \\
& - A_{33} \cdot A_{42} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{52} \cdot A_{43} - A_{53} \cdot A_{41} \cdot A_{32}
\end{aligned} \tag{П.12}$$

Аналитическое выражение для расчёта определителя матрицы \mathbf{C}_4 :

$$\begin{aligned}
|\mathbf{C}_4| &= A_{21}(A_{32} \cdot A_{43} \cdot A_{55} + A_{52} \cdot A_{33} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{42} \cdot A_{53} - A_{35} \cdot A_{43} \cdot A_{52} - \\
& - A_{32} \cdot A_{53} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{42} \cdot A_{33}) + A_{22}(A_{31} \cdot A_{43} \cdot A_{55} + A_{51} \cdot A_{33} \cdot A_{45} + \\
& + A_{35} \cdot A_{41} \cdot A_{53} - A_{35} \cdot A_{43} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{53} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{41} \cdot A_{33}) + \\
& + A_{23}(A_{31} \cdot A_{42} \cdot A_{55} + A_{51} \cdot A_{32} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{41} \cdot A_{52} - A_{35} \cdot A_{42} \cdot A_{51} - \\
& - A_{31} \cdot A_{52} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{41} \cdot A_{32}) + A_{25}(A_{31} \cdot A_{42} \cdot A_{53} + \\
& + A_{51} \cdot A_{32} \cdot A_{43} + A_{33} \cdot A_{41} \cdot A_{52} - A_{33} \cdot A_{42} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{52} \cdot A_{43} - A_{53} \cdot A_{41} \cdot A_{32})
\end{aligned} \tag{П.13}$$

Определитель матрицы \mathbf{C}_5 :

$$\begin{aligned}
|\mathbf{C}_5| &= \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} \end{vmatrix} = A_{21} \cdot \begin{vmatrix} A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{42} & A_{43} & A_{44} \\ A_{52} & A_{53} & A_{54} \end{vmatrix} + A_{22} \cdot \begin{vmatrix} A_{31} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{43} & A_{44} \\ A_{51} & A_{53} & A_{54} \end{vmatrix} + \\
& + A_{23} \cdot \begin{vmatrix} A_{31} & A_{32} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{44} \\ A_{51} & A_{52} & A_{54} \end{vmatrix} + A_{24} \cdot \begin{vmatrix} A_{31} & A_{32} & A_{33} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} \end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{П.14}$$

Для нахождения определителя матрицы воспользуемся методом треугольника:

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{42} & A_{43} & A_{44} \\ A_{52} & A_{53} & A_{54} \end{vmatrix} = A_{32} \cdot A_{43} \cdot A_{54} + A_{52} \cdot A_{33} \cdot A_{44} + A_{34} \cdot A_{42} \cdot A_{53} - \\
 & - A_{34} \cdot A_{43} \cdot A_{52} - A_{32} \cdot A_{53} \cdot A_{44} - A_{54} \cdot A_{42} \cdot A_{33} \\
 & \begin{vmatrix} A_{31} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{43} & A_{44} \\ A_{51} & A_{53} & A_{54} \end{vmatrix} = A_{31} \cdot A_{43} \cdot A_{54} + A_{54} \cdot A_{33} \cdot A_{44} + A_{34} \cdot A_{41} \cdot A_{53} - \\
 & - A_{34} \cdot A_{43} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{53} \cdot A_{44} - A_{54} \cdot A_{41} \cdot A_{33} \\
 & \begin{vmatrix} A_{31} & A_{32} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{44} \\ A_{51} & A_{52} & A_{54} \end{vmatrix} = A_{31} \cdot A_{42} \cdot A_{54} + A_{51} \cdot A_{32} \cdot A_{44} + A_{34} \cdot A_{41} \cdot A_{52} - \\
 & - A_{34} \cdot A_{42} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{52} \cdot A_{44} - A_{54} \cdot A_{41} \cdot A_{32} \\
 & \begin{vmatrix} A_{31} & A_{32} & A_{33} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} \end{vmatrix} = A_{31} \cdot A_{42} \cdot A_{53} + A_{51} \cdot A_{32} \cdot A_{43} + A_{33} \cdot A_{41} \cdot A_{52} - \\
 & - A_{33} \cdot A_{42} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{52} \cdot A_{43} - A_{53} \cdot A_{41} \cdot A_{32}
 \end{aligned} \tag{П.15}$$

Аналитическое выражение для расчёта определителя матрицы \mathbf{C}_5 :

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{C}_5| = & A_{21}(A_{32} \cdot A_{43} \cdot A_{54} + A_{52} \cdot A_{33} \cdot A_{44} + A_{34} \cdot A_{42} \cdot A_{53} - A_{34} \cdot A_{43} \cdot A_{52} - \\
 & - A_{32} \cdot A_{53} \cdot A_{44} - A_{54} \cdot A_{42} \cdot A_{33}) + A_{22}(A_{31} \cdot A_{43} \cdot A_{54} + A_{54} \cdot A_{33} \cdot A_{44} + \\
 & + A_{34} \cdot A_{41} \cdot A_{53} - A_{34} \cdot A_{43} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{53} \cdot A_{44} - A_{54} \cdot A_{41} \cdot A_{33}) + \\
 & + A_{23}(A_{31} \cdot A_{42} \cdot A_{54} + A_{51} \cdot A_{32} \cdot A_{44} + A_{34} \cdot A_{41} \cdot A_{52} - A_{34} \cdot A_{42} \cdot A_{51} - \\
 & - A_{31} \cdot A_{52} \cdot A_{44} - A_{54} \cdot A_{41} \cdot A_{32}) + A_{24}(A_{31} \cdot A_{42} \cdot A_{53} + A_{51} \cdot A_{32} \cdot A_{43} + \\
 & + A_{33} \cdot A_{41} \cdot A_{52} - A_{33} \cdot A_{42} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{52} \cdot A_{43} - A_{53} \cdot A_{41} \cdot A_{32})
 \end{aligned} \tag{П.16}$$

Итоговое выражения для нахождения определителя матрицы \mathbf{A} :

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{A}| = & A_{11}(A_{22} \cdot (A_{33} \cdot A_{44} \cdot A_{55} + A_{53} \cdot A_{34} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{43} \cdot A_{54} - A_{35} \cdot A_{44} \cdot A_{53} - \\
 & - A_{33} \cdot A_{54} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{43} \cdot A_{34}) + A_{23} \cdot (A_{32} \cdot A_{44} \cdot A_{55} + A_{52} \cdot A_{34} \cdot A_{45} + \\
 & + A_{35} \cdot A_{42} \cdot A_{54} - A_{35} \cdot A_{44} \cdot A_{52} - A_{32} \cdot A_{54} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{42} \cdot A_{34}) + \\
 & + A_{24}(A_{32} \cdot A_{43} \cdot A_{55} + A_{52} \cdot A_{33} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{42} \cdot A_{53} - A_{35} \cdot A_{43} \cdot A_{52} - A_{32} \cdot A_{53} \cdot A_{45}) + \\
 & + A_{25}(A_{32} \cdot A_{43} \cdot A_{54} + A_{52} \cdot A_{33} \cdot A_{44} + A_{34} \cdot A_{42} \cdot A_{53} - A_{34} \cdot A_{43} \cdot A_{52} - A_{32} \cdot A_{53} \cdot A_{44} - \\
 & - A_{54} \cdot A_{42} \cdot A_{33})) + A_{12}(A_{21}(A_{33} \cdot A_{44} \cdot A_{55} + A_{53} \cdot A_{34} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{43} \cdot A_{54} - \\
 & - A_{35} \cdot A_{44} \cdot A_{53} - A_{33} \cdot A_{54} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{43} \cdot A_{34}) + A_{23}(A_{31} \cdot A_{44} \cdot A_{55} + \\
 & + A_{51} \cdot A_{34} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{41} \cdot A_{54} - A_{35} \cdot A_{44} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{54} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{41} \cdot A_{34}) + \\
 & + A_{24}(A_{31} \cdot A_{43} \cdot A_{55} + A_{51} \cdot A_{33} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{41} \cdot A_{53} - A_{35} \cdot A_{43} \cdot A_{51} - \\
 & - A_{31} \cdot A_{53} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{41} \cdot A_{33}) + A_{25}(A_{31} \cdot A_{43} \cdot A_{54} + A_{51} \cdot A_{33} \cdot A_{44} + \\
 & + A_{34} \cdot A_{41} \cdot A_{53} - A_{34} \cdot A_{43} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{53} \cdot A_{44} - A_{54} \cdot A_{41} \cdot A_{33})) + \\
 & + A_{13}(A_{21}(A_{33} \cdot A_{44} \cdot A_{55} + A_{53} \cdot A_{34} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{43} \cdot A_{54} - A_{35} \cdot A_{44} \cdot A_{53} - \\
 & - A_{33} \cdot A_{54} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{43} \cdot A_{34}) + A_{23}(A_{31} \cdot A_{44} \cdot A_{55} + A_{51} \cdot A_{34} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{41} \cdot A_{54} - \\
 & - A_{35} \cdot A_{44} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{54} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{41} \cdot A_{34}) + A_{24}(A_{31} \cdot A_{43} \cdot A_{55} + A_{51} \cdot A_{33} \cdot A_{45} + \\
 & + A_{35} \cdot A_{41} \cdot A_{53} - A_{35} \cdot A_{43} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{53} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{41} \cdot A_{33}) + A_{25}(A_{31} \cdot A_{43} \cdot A_{54} + \\
 & + A_{51} \cdot A_{33} \cdot A_{44} + A_{34} \cdot A_{41} \cdot A_{53} - A_{34} \cdot A_{43} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{53} \cdot A_{44} - A_{54} \cdot A_{41} \cdot A_{33})) + \\
 & + A_{14}(A_{21}(A_{32} \cdot A_{43} \cdot A_{55} + A_{52} \cdot A_{33} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{42} \cdot A_{53} - A_{35} \cdot A_{43} \cdot A_{52} - \\
 & - A_{32} \cdot A_{53} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{42} \cdot A_{33}) + A_{22}(A_{31} \cdot A_{43} \cdot A_{55} + A_{51} \cdot A_{33} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{41} \cdot A_{53} - \\
 & - A_{35} \cdot A_{43} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{53} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{41} \cdot A_{33}) + A_{23}(A_{31} \cdot A_{42} \cdot A_{55} + A_{51} \cdot A_{32} \cdot A_{45} + \\
 & + A_{35} \cdot A_{41} \cdot A_{52} - A_{35} \cdot A_{42} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{52} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{41} \cdot A_{32}) + A_{25}(A_{31} \cdot A_{42} \cdot A_{53} + \\
 & + A_{51} \cdot A_{32} \cdot A_{43} + A_{33} \cdot A_{41} \cdot A_{52} - A_{33} \cdot A_{42} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{52} \cdot A_{43} - A_{53} \cdot A_{41} \cdot A_{32})) + \\
 & + A_{15}(A_{21}(A_{32} \cdot A_{43} \cdot A_{54} + A_{52} \cdot A_{33} \cdot A_{44} + A_{34} \cdot A_{42} \cdot A_{53} - A_{34} \cdot A_{43} \cdot A_{52} - \\
 & - A_{32} \cdot A_{53} \cdot A_{44} - A_{54} \cdot A_{42} \cdot A_{33}) + A_{22}(A_{31} \cdot A_{43} \cdot A_{54} + A_{54} \cdot A_{33} \cdot A_{44} + A_{34} \cdot A_{41} \cdot A_{53} - \\
 & - A_{34} \cdot A_{43} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{53} \cdot A_{44} - A_{54} \cdot A_{41} \cdot A_{33}) + A_{23}(A_{31} \cdot A_{42} \cdot A_{54} + A_{51} \cdot A_{32} \cdot A_{44} + \\
 & + A_{34} \cdot A_{41} \cdot A_{52} - A_{34} \cdot A_{42} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{52} \cdot A_{44} - A_{54} \cdot A_{41} \cdot A_{32}) + A_{24}(A_{31} \cdot A_{42} \cdot A_{53} + \\
 & + A_{51} \cdot A_{32} \cdot A_{43} + A_{33} \cdot A_{41} \cdot A_{52} - A_{33} \cdot A_{42} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{52} \cdot A_{43} - A_{53} \cdot A_{41} \cdot A_{32}))
 \end{aligned} \tag{П.17}$$

Определим алгебраическое дополнение к элементам матрицы $\tilde{\mathbf{A}}_{11}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_{11} = (-1)^{1+1} &= \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} = A_{22} \cdot \begin{vmatrix} A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} + \\ &+ A_{23} \cdot \begin{vmatrix} A_{32} & A_{34} & A_{35} \\ A_{42} & A_{44} & A_{45} \\ A_{52} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} + A_{24} \cdot \begin{vmatrix} A_{32} & A_{33} & A_{35} \\ A_{42} & A_{43} & A_{45} \\ A_{52} & A_{53} & A_{55} \end{vmatrix} + A_{25} \cdot \begin{vmatrix} A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{42} & A_{43} & A_{44} \\ A_{52} & A_{53} & A_{54} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (\text{П.18})$$

Для нахождения определителя матрицы воспользуемся методом треугольника:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} &= A_{33} \cdot A_{44} \cdot A_{55} + A_{53} \cdot A_{34} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{43} \cdot A_{54} - \\ &- A_{35} \cdot A_{44} \cdot A_{53} - A_{33} \cdot A_{54} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{43} \cdot A_{34} \\ \begin{vmatrix} A_{32} & A_{34} & A_{35} \\ A_{42} & A_{44} & A_{45} \\ A_{52} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} &= A_{32} \cdot A_{44} \cdot A_{55} + A_{52} \cdot A_{34} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{42} \cdot A_{54} - \\ &- A_{35} \cdot A_{44} \cdot A_{52} - A_{32} \cdot A_{54} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{42} \cdot A_{34} \\ \begin{vmatrix} A_{32} & A_{33} & A_{35} \\ A_{42} & A_{43} & A_{45} \\ A_{52} & A_{53} & A_{55} \end{vmatrix} &= A_{32} \cdot A_{43} \cdot A_{55} + A_{52} \cdot A_{33} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{42} \cdot A_{53} - \\ &- A_{35} \cdot A_{43} \cdot A_{52} - A_{32} \cdot A_{53} \cdot A_{45} \end{aligned} \quad (\text{П.19})$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{42} & A_{43} & A_{44} \\ A_{52} & A_{53} & A_{54} \end{vmatrix} &= A_{32} \cdot A_{43} \cdot A_{54} + A_{52} \cdot A_{33} \cdot A_{44} + A_{34} \cdot A_{42} \cdot A_{53} - \\ &- A_{34} \cdot A_{43} \cdot A_{52} - A_{32} \cdot A_{53} \cdot A_{44} - A_{54} \cdot A_{42} \cdot A_{33} \end{aligned}$$

Подставим расчетные выражения определителей в (П.18):

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_{11} = & A_{22} \cdot (A_{33} \cdot A_{44} \cdot A_{55} + A_{53} \cdot A_{34} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{43} \cdot A_{54} - A_{35} \cdot A_{44} \cdot A_{53} \\ & - A_{33} \cdot A_{54} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{43} \cdot A_{34}) + A_{23} \cdot (A_{32} \cdot A_{44} \cdot A_{55} + A_{52} \cdot A_{34} \cdot A_{45} + \\ & + A_{35} \cdot A_{42} \cdot A_{54} - A_{35} \cdot A_{44} \cdot A_{52} - A_{32} \cdot A_{54} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{42} \cdot A_{34}) + \\ & + A_{24} \cdot (A_{32} \cdot A_{43} \cdot A_{55} + A_{52} \cdot A_{33} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{42} \cdot A_{53} - A_{35} \cdot A_{43} \cdot A_{52} - \\ & - A_{32} \cdot A_{53} \cdot A_{45}) + A_{25} \cdot (A_{32} \cdot A_{43} \cdot A_{54} + A_{52} \cdot A_{33} \cdot A_{44} + A_{34} \cdot A_{42} \cdot A_{53} - \\ & - A_{34} \cdot A_{43} \cdot A_{52} - A_{32} \cdot A_{53} \cdot A_{44} - A_{54} \cdot A_{42} \cdot A_{33}) \end{aligned} \quad (\text{П.20})$$

Определим алгебраическое дополнение к элементам матрицы $\tilde{\mathbf{A}}_{12}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_{12} = & (-1)^{1+2} = \begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ A_{31} & A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ A_{41} & A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ A_{51} & A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} = A_{21} \cdot \begin{vmatrix} A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} + \\ & + A_{23} \cdot \begin{vmatrix} A_{31} & A_{34} & A_{35} \\ A_{41} & A_{44} & A_{45} \\ A_{51} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} + A_{24} \cdot \begin{vmatrix} A_{31} & A_{33} & A_{35} \\ A_{41} & A_{43} & A_{45} \\ A_{51} & A_{53} & A_{55} \end{vmatrix} + A_{25} \cdot \begin{vmatrix} A_{31} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{43} & A_{44} \\ A_{51} & A_{53} & A_{54} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (\text{П.21})$$

Для нахождения определителя матрицы воспользуемся методом треугольника:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} = & A_{33} \cdot A_{44} \cdot A_{55} + A_{53} \cdot A_{34} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{43} \cdot A_{54} - \\ & - A_{35} \cdot A_{44} \cdot A_{53} - A_{33} \cdot A_{54} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{43} \cdot A_{34} \\ \begin{vmatrix} A_{31} & A_{34} & A_{35} \\ A_{41} & A_{44} & A_{45} \\ A_{51} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} = & A_{31} \cdot A_{44} \cdot A_{55} + A_{51} \cdot A_{34} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{41} \cdot A_{54} - \\ & - A_{35} \cdot A_{44} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{54} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{41} \cdot A_{34} \\ \begin{vmatrix} A_{31} & A_{33} & A_{35} \\ A_{41} & A_{43} & A_{45} \\ A_{51} & A_{53} & A_{55} \end{vmatrix} = & A_{31} \cdot A_{43} \cdot A_{55} + A_{51} \cdot A_{33} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{41} \cdot A_{53} \\ & - A_{35} \cdot A_{43} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{53} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{41} \cdot A_{33} \end{aligned} \quad (\text{П.22})$$

$$\begin{vmatrix} A_{31} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{43} & A_{44} \\ A_{51} & A_{53} & A_{54} \end{vmatrix} = A_{31} \cdot A_{43} \cdot A_{54} + A_{51} \cdot A_{33} \cdot A_{44} + A_{34} \cdot A_{41} \cdot A_{53} - \\ - A_{34} \cdot A_{43} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{53} \cdot A_{44} - A_{54} \cdot A_{41} \cdot A_{33}$$

Подставим расчетные выражения определителей в (П.21):

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_{12} = & A_{21}(A_{33} \cdot A_{44} \cdot A_{55} + A_{53} \cdot A_{34} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{43} \cdot A_{54} - A_{35} \cdot A_{44} \cdot A_{53} - \\ & - A_{33} \cdot A_{54} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{43} \cdot A_{34}) + A_{23}(A_{31} \cdot A_{44} \cdot A_{55} + A_{51} \cdot A_{34} \cdot A_{45} + \\ & + A_{35} \cdot A_{41} \cdot A_{54} - A_{35} \cdot A_{44} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{54} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{41} \cdot A_{34}) + \\ & + A_{24}(A_{31} \cdot A_{43} \cdot A_{55} + A_{51} \cdot A_{33} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{41} \cdot A_{53} - A_{35} \cdot A_{43} \cdot A_{51} - \\ & - A_{31} \cdot A_{53} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{41} \cdot A_{33}) + A_{25}(A_{31} \cdot A_{43} \cdot A_{54} + A_{51} \cdot A_{33} \cdot A_{44} + \\ & + A_{34} \cdot A_{41} \cdot A_{53} - A_{34} \cdot A_{43} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{53} \cdot A_{44} - A_{54} \cdot A_{41} \cdot A_{33}) \end{aligned} \quad (\text{П.23})$$

Определим алгебраическое дополнение к элементам матрицы $\tilde{\mathbf{A}}_{13}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_{13} = & (-1)^{1+3} = \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{24} & A_{25} \\ A_{31} & A_{32} & A_{34} & A_{35} \\ A_{41} & A_{42} & A_{44} & A_{45} \\ A_{51} & A_{52} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} = A_{21} \cdot \begin{vmatrix} A_{32} & A_{34} & A_{35} \\ A_{42} & A_{44} & A_{45} \\ A_{52} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} + \\ & + A_{22} \cdot \begin{vmatrix} A_{31} & A_{34} & A_{35} \\ A_{41} & A_{44} & A_{45} \\ A_{51} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} + A_{24} \cdot \begin{vmatrix} A_{31} & A_{32} & A_{35} \\ A_{41} & A_{42} & A_{45} \\ A_{51} & A_{52} & A_{55} \end{vmatrix} + A_{25} \cdot \begin{vmatrix} A_{31} & A_{32} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{44} \\ A_{51} & A_{52} & A_{54} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (\text{П.24})$$

Для нахождения определителя матрицы воспользуемся методом треугольника:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} A_{32} & A_{34} & A_{35} \\ A_{42} & A_{44} & A_{45} \\ A_{52} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} = & A_{32} \cdot A_{44} \cdot A_{55} + A_{52} \cdot A_{34} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{42} \cdot A_{54} - \\ & - A_{35} \cdot A_{44} \cdot A_{52} - A_{32} \cdot A_{54} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{42} \cdot A_{34} \\ \begin{vmatrix} A_{31} & A_{34} & A_{35} \\ A_{41} & A_{44} & A_{45} \\ A_{51} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} = & A_{31} \cdot A_{44} \cdot A_{55} + A_{51} \cdot A_{34} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{41} \cdot A_{54} - \\ & - A_{35} \cdot A_{44} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{54} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{41} \cdot A_{34} \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} A_{31} & A_{32} & A_{35} \\ A_{41} & A_{42} & A_{45} \\ A_{51} & A_{52} & A_{55} \end{vmatrix} = A_{31} \cdot A_{42} \cdot A_{55} + A_{51} \cdot A_{32} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{41} \cdot A_{52} - \\ - A_{35} \cdot A_{42} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{52} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{41} \cdot A_{32} \quad (\text{П.25})$$

$$\begin{vmatrix} A_{31} & A_{32} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{44} \\ A_{51} & A_{52} & A_{54} \end{vmatrix} = A_{31} \cdot A_{42} \cdot A_{54} + A_{51} \cdot A_{32} \cdot A_{44} + A_{34} \cdot A_{41} \cdot A_{52} - \\ - A_{34} \cdot A_{42} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{52} \cdot A_{44} - A_{54} \cdot A_{41} \cdot A_{32}$$

Подставим расчетные выражения определителей в (П.24):

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_{13} = & A_{21}(A_{32} \cdot A_{44} \cdot A_{55} + A_{52} \cdot A_{34} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{42} \cdot A_{54} - A_{35} \cdot A_{44} \cdot A_{52} - \\ & - A_{32} \cdot A_{54} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{42} \cdot A_{34}) + A_{22}(A_{31} \cdot A_{44} \cdot A_{55} + A_{51} \cdot A_{34} \cdot A_{45} + \\ & + A_{35} \cdot A_{41} \cdot A_{54} - A_{35} \cdot A_{44} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{54} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{41} \cdot A_{34}) + \\ & + A_{24}(A_{31} \cdot A_{42} \cdot A_{55} + A_{51} \cdot A_{32} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{41} \cdot A_{52} - A_{35} \cdot A_{42} \cdot A_{51} - \\ & - A_{31} \cdot A_{52} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{41} \cdot A_{32}) + A_{25}(A_{31} \cdot A_{42} \cdot A_{54} + A_{51} \cdot A_{32} \cdot A_{44} + \\ & + A_{34} \cdot A_{41} \cdot A_{52} - A_{34} \cdot A_{42} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{52} \cdot A_{44} - A_{54} \cdot A_{41} \cdot A_{32}) \end{aligned} \quad (\text{П.26})$$

Определим алгебраическое дополнение к элементам матрицы $\tilde{\mathbf{A}}_{14}$:

$$\tilde{\mathbf{A}}_{14} = (-1)^{1+4} = \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{25} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{35} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{45} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{55} \end{vmatrix} = A_{21} \cdot \begin{vmatrix} A_{32} & A_{33} & A_{35} \\ A_{42} & A_{43} & A_{45} \\ A_{52} & A_{53} & A_{55} \end{vmatrix} + \quad (\text{П.27})$$

$$+ A_{22} \cdot \begin{vmatrix} A_{31} & A_{33} & A_{35} \\ A_{41} & A_{43} & A_{45} \\ A_{51} & A_{53} & A_{55} \end{vmatrix} + A_{23} \cdot \begin{vmatrix} A_{31} & A_{32} & A_{35} \\ A_{41} & A_{42} & A_{45} \\ A_{51} & A_{52} & A_{55} \end{vmatrix} + A_{25} \cdot \begin{vmatrix} A_{31} & A_{32} & A_{33} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} \end{vmatrix}$$

Для нахождения определителя матрицы воспользуемся методом треугольника:

$$\begin{vmatrix} A_{32} & A_{33} & A_{35} \\ A_{42} & A_{43} & A_{45} \\ A_{52} & A_{53} & A_{55} \end{vmatrix} = A_{32} \cdot A_{43} \cdot A_{55} + A_{52} \cdot A_{33} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{42} \cdot A_{53} - \\ - A_{35} \cdot A_{43} \cdot A_{52} - A_{32} \cdot A_{53} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{42} \cdot A_{33}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} A_{31} & A_{33} & A_{35} \\ A_{41} & A_{43} & A_{45} \\ A_{51} & A_{53} & A_{55} \end{vmatrix} = A_{31} \cdot A_{43} \cdot A_{55} + A_{51} \cdot A_{33} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{41} \cdot A_{53} - \\
& - A_{35} \cdot A_{43} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{53} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{41} \cdot A_{33} \\
& \begin{vmatrix} A_{31} & A_{32} & A_{35} \\ A_{41} & A_{42} & A_{45} \\ A_{51} & A_{52} & A_{55} \end{vmatrix} = A_{31} \cdot A_{42} \cdot A_{55} + A_{51} \cdot A_{32} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{41} \cdot A_{52} - \\
& - A_{35} \cdot A_{42} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{52} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{41} \cdot A_{32} \\
& \begin{vmatrix} A_{31} & A_{32} & A_{33} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} \end{vmatrix} = A_{31} \cdot A_{42} \cdot A_{53} + A_{51} \cdot A_{32} \cdot A_{43} + A_{33} \cdot A_{41} \cdot A_{52} \\
& - A_{33} \cdot A_{42} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{52} \cdot A_{43} - A_{53} \cdot A_{41} \cdot A_{32}
\end{aligned} \tag{П.28}$$

Подставим расчетные выражения определителей в (П.27):

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{A}}_{14} = & A_{21}(A_{32} \cdot A_{43} \cdot A_{55} + A_{52} \cdot A_{33} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{42} \cdot A_{53} - A_{35} \cdot A_{43} \cdot A_{52} - \\
& - A_{32} \cdot A_{53} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{42} \cdot A_{33}) + A_{22}(A_{31} \cdot A_{43} \cdot A_{55} + A_{51} \cdot A_{33} \cdot A_{45} + \\
& + A_{35} \cdot A_{41} \cdot A_{53} - A_{35} \cdot A_{43} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{53} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{41} \cdot A_{33}) + \\
& + A_{23}(A_{31} \cdot A_{42} \cdot A_{55} + A_{51} \cdot A_{32} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{41} \cdot A_{52} - A_{35} \cdot A_{42} \cdot A_{51} - \\
& - A_{31} \cdot A_{52} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{41} \cdot A_{32}) + A_{25}(A_{31} \cdot A_{42} \cdot A_{53} + \\
& + A_{51} \cdot A_{32} \cdot A_{43} + A_{33} \cdot A_{41} \cdot A_{52} - A_{33} \cdot A_{42} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{52} \cdot A_{43} - A_{53} \cdot A_{41} \cdot A_{32})
\end{aligned} \tag{П.29}$$

Определим алгебраическое дополнение к элементам матрицы $\tilde{\mathbf{A}}_{15}$:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{A}}_{14} = & (-1)^{1+5} = \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} \end{vmatrix} = A_{21} \cdot \begin{vmatrix} A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{42} & A_{43} & A_{44} \\ A_{52} & A_{53} & A_{54} \end{vmatrix} + \\
& + A_{22} \cdot \begin{vmatrix} A_{31} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{43} & A_{44} \\ A_{51} & A_{53} & A_{54} \end{vmatrix} + A_{23} \cdot \begin{vmatrix} A_{31} & A_{32} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{44} \\ A_{51} & A_{52} & A_{54} \end{vmatrix} + A_{24} \cdot \begin{vmatrix} A_{31} & A_{32} & A_{33} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} \end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{П.30}$$

Для нахождения определителя матрицы воспользуемся методом треугольника:

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{42} & A_{43} & A_{44} \\ A_{52} & A_{53} & A_{54} \end{vmatrix} = A_{32} \cdot A_{43} \cdot A_{54} + A_{52} \cdot A_{33} \cdot A_{44} + A_{34} \cdot A_{42} \cdot A_{53} - \\
 & - A_{34} \cdot A_{43} \cdot A_{52} - A_{32} \cdot A_{53} \cdot A_{44} - A_{54} \cdot A_{42} \cdot A_{33} \\
 & \begin{vmatrix} A_{31} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{43} & A_{44} \\ A_{51} & A_{53} & A_{54} \end{vmatrix} = A_{31} \cdot A_{43} \cdot A_{54} + A_{54} \cdot A_{33} \cdot A_{44} + A_{34} \cdot A_{41} \cdot A_{53} - \\
 & - A_{34} \cdot A_{43} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{53} \cdot A_{44} - A_{54} \cdot A_{41} \cdot A_{33} \\
 & \begin{vmatrix} A_{31} & A_{32} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{44} \\ A_{51} & A_{52} & A_{54} \end{vmatrix} = A_{31} \cdot A_{42} \cdot A_{54} + A_{51} \cdot A_{32} \cdot A_{44} + A_{34} \cdot A_{41} \cdot A_{52} - \\
 & - A_{34} \cdot A_{42} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{52} \cdot A_{44} - A_{54} \cdot A_{41} \cdot A_{32}
 \end{aligned} \tag{П.31}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} A_{31} & A_{32} & A_{33} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} \end{vmatrix} = A_{31} \cdot A_{42} \cdot A_{53} + A_{51} \cdot A_{32} \cdot A_{43} + A_{33} \cdot A_{41} \cdot A_{52} - \\
 & - A_{33} \cdot A_{42} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{52} \cdot A_{43} - A_{53} \cdot A_{41} \cdot A_{32}
 \end{aligned}$$

Подставим расчетные выражения определителей в (П.30):

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{A}}_{15} = & A_{21}(A_{32} \cdot A_{43} \cdot A_{54} + A_{52} \cdot A_{33} \cdot A_{44} + A_{34} \cdot A_{42} \cdot A_{53} - A_{34} \cdot A_{43} \cdot A_{52} - \\
 & - A_{32} \cdot A_{53} \cdot A_{44} - A_{54} \cdot A_{42} \cdot A_{33}) + A_{22}(A_{31} \cdot A_{43} \cdot A_{54} + A_{54} \cdot A_{33} \cdot A_{44} + \\
 & + A_{34} \cdot A_{41} \cdot A_{53} - A_{34} \cdot A_{43} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{53} \cdot A_{44} - A_{54} \cdot A_{41} \cdot A_{33}) + \\
 & + A_{23}(A_{31} \cdot A_{42} \cdot A_{54} + A_{51} \cdot A_{32} \cdot A_{44} + A_{34} \cdot A_{41} \cdot A_{52} - A_{34} \cdot A_{42} \cdot A_{51} - \\
 & - A_{31} \cdot A_{52} \cdot A_{44} - A_{54} \cdot A_{41} \cdot A_{32}) + A_{24}(A_{31} \cdot A_{42} \cdot A_{53} + A_{51} \cdot A_{32} \cdot A_{43} + \\
 & + A_{33} \cdot A_{41} \cdot A_{52} - A_{33} \cdot A_{42} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{52} \cdot A_{43} - A_{53} \cdot A_{41} \cdot A_{32})
 \end{aligned} \tag{П.32}$$

Определим алгебраическое дополнение к элементам матрицы $\tilde{\mathbf{A}}_{21}$:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{A}}_{21} = & (-1)^{2+1} = \begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\ A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} = A_{12} \cdot \begin{vmatrix} A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} + \\
 & + A_{13} \cdot \begin{vmatrix} A_{32} & A_{34} & A_{35} \\ A_{42} & A_{44} & A_{45} \\ A_{52} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} + A_{14} \cdot \begin{vmatrix} A_{32} & A_{33} & A_{35} \\ A_{42} & A_{43} & A_{45} \\ A_{52} & A_{53} & A_{55} \end{vmatrix} + A_{15} \cdot \begin{vmatrix} A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{42} & A_{43} & A_{44} \\ A_{52} & A_{53} & A_{54} \end{vmatrix}
 \end{aligned} \tag{П.33}$$

Для нахождения определителя матрицы воспользуемся методом треугольника:

$$\begin{vmatrix} A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} = A_{33} \cdot A_{44} \cdot A_{55} + A_{53} \cdot A_{34} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{43} \cdot A_{54} - \\ - A_{35} \cdot A_{44} \cdot A_{53} - A_{33} \cdot A_{54} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{43} \cdot A_{34}$$

$$\begin{vmatrix} A_{32} & A_{34} & A_{35} \\ A_{42} & A_{44} & A_{45} \\ A_{52} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} = A_{32} \cdot A_{44} \cdot A_{55} + A_{52} \cdot A_{34} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{42} \cdot A_{54} - \\ - A_{35} \cdot A_{44} \cdot A_{52} - A_{32} \cdot A_{54} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{42} \cdot A_{34}$$

$$\begin{vmatrix} A_{32} & A_{33} & A_{35} \\ A_{42} & A_{43} & A_{45} \\ A_{52} & A_{53} & A_{55} \end{vmatrix} = A_{32} \cdot A_{43} \cdot A_{55} + A_{52} \cdot A_{33} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{42} \cdot A_{53} - \\ - A_{35} \cdot A_{43} \cdot A_{52} - A_{32} \cdot A_{53} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{42} \cdot A_{33} \quad (\text{П.34})$$

$$\begin{vmatrix} A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{42} & A_{43} & A_{44} \\ A_{52} & A_{53} & A_{54} \end{vmatrix} = A_{32} \cdot A_{43} \cdot A_{54} + A_{52} \cdot A_{33} \cdot A_{44} + A_{34} \cdot A_{42} \cdot A_{53} - \\ - A_{34} \cdot A_{43} \cdot A_{52} - A_{32} \cdot A_{53} \cdot A_{44} - A_{54} \cdot A_{42} \cdot A_{33}$$

Подставим расчетные выражения определителей в (П.33):

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_{21} = & A_{12} \cdot (A_{33} \cdot A_{44} \cdot A_{55} + A_{53} \cdot A_{34} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{43} \cdot A_{54} - A_{35} \cdot A_{44} \cdot A_{53} - \\ & A_{33} \cdot A_{54} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{43} \cdot A_{34}) + A_{13} (A_{32} \cdot A_{44} \cdot A_{55} + A_{52} \cdot A_{34} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{42} \cdot A_{54} - \\ & - A_{35} \cdot A_{44} \cdot A_{52} - A_{32} \cdot A_{54} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{42} \cdot A_{34}) + A_{14} \cdot (A_{32} \cdot A_{43} \cdot A_{55} + A_{52} \cdot A_{33} \cdot A_{45} + \\ & + A_{35} \cdot A_{42} \cdot A_{53} - A_{35} \cdot A_{43} \cdot A_{52} - A_{32} \cdot A_{53} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{42} \cdot A_{33}) + A_{15} \cdot (A_{32} \cdot A_{43} \cdot A_{54} + \\ & + A_{52} \cdot A_{33} \cdot A_{44} + A_{34} \cdot A_{42} \cdot A_{53} - A_{34} \cdot A_{43} \cdot A_{52} - A_{32} \cdot A_{53} \cdot A_{44} - A_{54} \cdot A_{42} \cdot A_{33}) \end{aligned} \quad (\text{П.35})$$

Определим алгебраическое дополнение к элементам матрицы $\tilde{\mathbf{A}}_{22}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_{22} = & (-1)^{2+2} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\ A_{31} & A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ A_{41} & A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ A_{51} & A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} = A_{11} \cdot \begin{vmatrix} A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} + \\ & + A_{13} \cdot \begin{vmatrix} A_{31} & A_{34} & A_{35} \\ A_{41} & A_{44} & A_{45} \\ A_{51} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} + A_{14} \cdot \begin{vmatrix} A_{31} & A_{33} & A_{35} \\ A_{41} & A_{43} & A_{45} \\ A_{51} & A_{53} & A_{55} \end{vmatrix} + A_{15} \cdot \begin{vmatrix} A_{31} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{43} & A_{44} \\ A_{51} & A_{53} & A_{54} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (\text{П.36})$$

Для нахождения определителя матрицы воспользуемся методом треугольника:

$$\begin{vmatrix} A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} = A_{33} \cdot A_{44} \cdot A_{55} + A_{53} \cdot A_{34} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{43} \cdot A_{54} -$$

$$- A_{35} \cdot A_{44} \cdot A_{53} - A_{33} \cdot A_{54} \cdot A_{45}$$

$$\begin{vmatrix} A_{31} & A_{34} & A_{35} \\ A_{41} & A_{44} & A_{45} \\ A_{51} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} = A_{31} \cdot A_{44} \cdot A_{55} + A_{35} \cdot A_{41} \cdot A_{54} + A_{51} \cdot A_{34} \cdot A_{45} -$$

$$- A_{35} \cdot A_{44} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{54} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{41} \cdot A_{34}$$

$$\begin{vmatrix} A_{31} & A_{33} & A_{35} \\ A_{41} & A_{43} & A_{45} \\ A_{51} & A_{53} & A_{55} \end{vmatrix} = A_{31} \cdot A_{43} \cdot A_{55} + A_{35} \cdot A_{41} \cdot A_{53} + A_{51} \cdot A_{33} \cdot A_{45} -$$

$$- A_{35} \cdot A_{43} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{53} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{41} \cdot A_{33}$$

$$\begin{vmatrix} A_{31} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{43} & A_{44} \\ A_{51} & A_{53} & A_{54} \end{vmatrix} = A_{31} \cdot A_{43} \cdot A_{54} + A_{51} \cdot A_{33} \cdot A_{44} + A_{34} \cdot A_{41} \cdot A_{53}$$

$$- A_{34} \cdot A_{43} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{53} \cdot A_{44} - A_{54} \cdot A_{41} \cdot A_{33}$$

(П.37)

Подставим расчетные выражения определителей в (П.36):

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_{22} = & A_{11} \cdot (A_{33} \cdot A_{44} \cdot A_{55} + A_{53} \cdot A_{34} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{43} \cdot A_{54} - A_{35} \cdot A_{44} \cdot A_{53} - \\ & - A_{33} \cdot A_{54} \cdot A_{45}) + A_{13} \cdot (A_{31} \cdot A_{44} \cdot A_{55} + A_{35} \cdot A_{41} \cdot A_{54} + A_{51} \cdot A_{34} \cdot A_{45} - \\ & - A_{35} \cdot A_{44} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{54} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{41} \cdot A_{34}) + A_{14} \cdot (A_{31} \cdot A_{43} \cdot A_{55} + \\ & + A_{35} \cdot A_{41} \cdot A_{53} + A_{51} \cdot A_{33} \cdot A_{45} - A_{35} \cdot A_{43} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{53} \cdot A_{45} - \\ & - A_{55} \cdot A_{41} \cdot A_{33}) + A_{15} \cdot (A_{31} \cdot A_{43} \cdot A_{54} + A_{51} \cdot A_{33} \cdot A_{44} + A_{34} \cdot A_{41} \cdot A_{53} - \\ & - A_{34} \cdot A_{43} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{53} \cdot A_{44} - A_{54} \cdot A_{41} \cdot A_{33}) \end{aligned}$$

(П.38)

Определим алгебраическое дополнение к элементам матрицы $\tilde{\mathbf{A}}_{23}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_{23} = (-1)^{2+3} = & \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{14} & A_{15} \\ A_{31} & A_{32} & A_{34} & A_{35} \\ A_{41} & A_{42} & A_{44} & A_{45} \\ A_{51} & A_{52} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} = A_{11} \cdot \begin{vmatrix} A_{32} & A_{34} & A_{35} \\ A_{42} & A_{44} & A_{45} \\ A_{52} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} + \\ & + A_{12} \cdot \begin{vmatrix} A_{31} & A_{34} & A_{35} \\ A_{41} & A_{44} & A_{45} \\ A_{51} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} + A_{14} \cdot \begin{vmatrix} A_{31} & A_{32} & A_{35} \\ A_{41} & A_{42} & A_{45} \\ A_{51} & A_{52} & A_{55} \end{vmatrix} + A_{15} \cdot \begin{vmatrix} A_{31} & A_{32} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{44} \\ A_{51} & A_{52} & A_{54} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

(П.39)

Для нахождения определителя матрицы воспользуемся методом треугольника:

$$\begin{vmatrix} A_{32} & A_{34} & A_{35} \\ A_{42} & A_{44} & A_{45} \\ A_{52} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} = A_{32} \cdot A_{44} \cdot A_{55} + A_{52} \cdot A_{34} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{42} \cdot A_{54} - \\ - A_{35} \cdot A_{44} \cdot A_{52} - A_{32} \cdot A_{54} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{42} \cdot A_{34}$$

$$\begin{vmatrix} A_{31} & A_{34} & A_{35} \\ A_{41} & A_{44} & A_{45} \\ A_{51} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} = A_{31} \cdot A_{44} \cdot A_{55} + A_{51} \cdot A_{34} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{41} \cdot A_{54} - \\ - A_{35} \cdot A_{44} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{54} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{41} \cdot A_{34}$$

$$\begin{vmatrix} A_{31} & A_{32} & A_{35} \\ A_{41} & A_{42} & A_{45} \\ A_{51} & A_{52} & A_{55} \end{vmatrix} = A_{31} \cdot A_{42} \cdot A_{55} + A_{51} \cdot A_{32} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{41} \cdot A_{52} - \\ - A_{35} \cdot A_{42} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{52} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{41} \cdot A_{32}$$

$$\begin{vmatrix} A_{31} & A_{32} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{44} \\ A_{51} & A_{52} & A_{54} \end{vmatrix} = A_{31} \cdot A_{42} \cdot A_{54} + A_{51} \cdot A_{32} \cdot A_{44} + A_{34} \cdot A_{41} \cdot A_{52} - \\ - A_{34} \cdot A_{42} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{52} \cdot A_{44} - A_{54} \cdot A_{41} \cdot A_{32}$$

(П.40)

Подставим расчетные выражения определителей в (П.39):

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_{23} = & A_{11} \cdot (A_{32} \cdot A_{44} \cdot A_{55} + A_{52} \cdot A_{34} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{42} \cdot A_{54} - A_{35} \cdot A_{44} \cdot A_{52} - \\ & - A_{32} \cdot A_{54} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{42} \cdot A_{34}) + A_{12} \cdot (A_{31} \cdot A_{44} \cdot A_{55} + A_{51} \cdot A_{34} \cdot A_{45} + \\ & + A_{35} \cdot A_{41} \cdot A_{54} - A_{35} \cdot A_{44} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{54} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{41} \cdot A_{34}) + \\ & + A_{14} \cdot (A_{31} \cdot A_{42} \cdot A_{55} + A_{51} \cdot A_{32} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{41} \cdot A_{52} - A_{35} \cdot A_{42} \cdot A_{51} - \\ & - A_{31} \cdot A_{52} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{41} \cdot A_{32}) + A_{15} \cdot (A_{31} \cdot A_{42} \cdot A_{54} + A_{51} \cdot A_{32} \cdot A_{44} + \\ & + A_{34} \cdot A_{41} \cdot A_{52} - A_{34} \cdot A_{42} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{52} \cdot A_{44} - A_{54} \cdot A_{41} \cdot A_{32}) \end{aligned}$$

(П.41)

Определим алгебраическое дополнение к элементам матрицы $\tilde{\mathbf{A}}_{24}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_{24} = (-1)^{2+4} = & \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{15} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{35} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{45} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{55} \end{vmatrix} = A_{11} \cdot \begin{vmatrix} A_{32} & A_{33} & A_{35} \\ A_{42} & A_{43} & A_{45} \\ A_{52} & A_{53} & A_{55} \end{vmatrix} + \\ & + A_{12} \cdot \begin{vmatrix} A_{31} & A_{33} & A_{35} \\ A_{41} & A_{43} & A_{45} \\ A_{51} & A_{53} & A_{55} \end{vmatrix} + A_{13} \cdot \begin{vmatrix} A_{31} & A_{32} & A_{35} \\ A_{41} & A_{42} & A_{45} \\ A_{51} & A_{52} & A_{55} \end{vmatrix} + A_{15} \cdot \begin{vmatrix} A_{31} & A_{32} & A_{33} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

(П.42)

Для нахождения определителя матрицы воспользуемся методом треугольника:

$$\begin{vmatrix} A_{32} & A_{33} & A_{35} \\ A_{42} & A_{43} & A_{45} \\ A_{52} & A_{53} & A_{55} \end{vmatrix} = A_{32} \cdot A_{43} \cdot A_{55} + A_{52} \cdot A_{33} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{42} \cdot A_{53} - \\ - A_{35} \cdot A_{43} \cdot A_{52} - A_{32} \cdot A_{53} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{42} \cdot A_{33}$$

$$\begin{vmatrix} A_{31} & A_{33} & A_{35} \\ A_{41} & A_{43} & A_{45} \\ A_{51} & A_{53} & A_{55} \end{vmatrix} = A_{31} \cdot A_{43} \cdot A_{55} + A_{51} \cdot A_{33} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{41} \cdot A_{53} - \\ - A_{35} \cdot A_{43} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{53} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{41} \cdot A_{33}$$

$$\begin{vmatrix} A_{31} & A_{32} & A_{35} \\ A_{41} & A_{42} & A_{45} \\ A_{51} & A_{52} & A_{55} \end{vmatrix} = A_{31} \cdot A_{42} \cdot A_{55} + A_{51} \cdot A_{32} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{41} \cdot A_{52} - \\ - A_{35} \cdot A_{42} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{52} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{41} \cdot A_{32}$$

$$\begin{vmatrix} A_{31} & A_{32} & A_{33} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} \end{vmatrix} = A_{31} \cdot A_{42} \cdot A_{53} + A_{51} \cdot A_{32} \cdot A_{43} + A_{33} \cdot A_{41} \cdot A_{52} - \\ - A_{33} \cdot A_{42} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{52} \cdot A_{43} - A_{53} \cdot A_{41} \cdot A_{32}$$

(П.43)

Подставим расчетные выражения определителей в (П.42):

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_{24} = & A_{11} \cdot (A_{32} \cdot A_{43} \cdot A_{55} + A_{52} \cdot A_{33} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{42} \cdot A_{53} - A_{35} \cdot A_{43} \cdot A_{52} - \\ & - A_{32} \cdot A_{53} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{42} \cdot A_{33}) + A_{12} \cdot (A_{31} \cdot A_{43} \cdot A_{55} + A_{51} \cdot A_{33} \cdot A_{45} + \\ & + A_{35} \cdot A_{41} \cdot A_{53} - A_{35} \cdot A_{43} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{53} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{41} \cdot A_{33}) + \\ & + A_{13} \cdot (A_{31} \cdot A_{42} \cdot A_{55} + A_{51} \cdot A_{32} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{41} \cdot A_{52} - A_{35} \cdot A_{42} \cdot A_{51} - \\ & - A_{31} \cdot A_{52} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{41} \cdot A_{32}) + A_{15} \cdot (A_{31} \cdot A_{42} \cdot A_{53} + A_{51} \cdot A_{32} \cdot A_{43} + \\ & + A_{33} \cdot A_{41} \cdot A_{52} - A_{33} \cdot A_{42} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{52} \cdot A_{43} - A_{53} \cdot A_{41} \cdot A_{32}) \end{aligned}$$

(П.44)

Определим алгебраическое дополнение к элементам матрицы $\tilde{\mathbf{A}}_{25}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_{25} = & (-1)^{2+5} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} \end{vmatrix} = A_{11} \cdot \begin{vmatrix} A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{42} & A_{43} & A_{44} \\ A_{52} & A_{53} & A_{54} \end{vmatrix} + \\ & + A_{12} \cdot \begin{vmatrix} A_{31} & A_{33} & A_{35} \\ A_{41} & A_{43} & A_{45} \\ A_{51} & A_{53} & A_{55} \end{vmatrix} + A_{13} \cdot \begin{vmatrix} A_{31} & A_{32} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{44} \\ A_{51} & A_{52} & A_{54} \end{vmatrix} + A_{14} \cdot \begin{vmatrix} A_{31} & A_{32} & A_{33} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

(П.45)

Для нахождения определителя матрицы воспользуемся методом треугольника:

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{42} & A_{43} & A_{44} \\ A_{52} & A_{53} & A_{54} \end{vmatrix} = A_{32} \cdot A_{43} \cdot A_{54} + A_{52} \cdot A_{33} \cdot A_{44} + A_{34} \cdot A_{42} \cdot A_{53} - \\
 & - A_{34} \cdot A_{43} \cdot A_{52} - A_{32} \cdot A_{53} \cdot A_{44} - A_{54} \cdot A_{42} \cdot A_{33} \\
 & \begin{vmatrix} A_{31} & A_{33} & A_{35} \\ A_{41} & A_{43} & A_{45} \\ A_{51} & A_{53} & A_{55} \end{vmatrix} = A_{31} \cdot A_{43} \cdot A_{55} + A_{51} \cdot A_{33} \cdot A_{45} + A_{35} \cdot A_{41} \cdot A_{53} - \\
 & - A_{35} \cdot A_{43} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{53} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{41} \cdot A_{33} \\
 & \begin{vmatrix} A_{31} & A_{32} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{44} \\ A_{51} & A_{52} & A_{54} \end{vmatrix} = A_{31} \cdot A_{42} \cdot A_{54} + A_{51} \cdot A_{32} \cdot A_{44} + A_{34} \cdot A_{41} \cdot A_{52} - \\
 & - A_{34} \cdot A_{42} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{52} \cdot A_{44} - A_{54} \cdot A_{41} \cdot A_{32} \\
 & \begin{vmatrix} A_{31} & A_{32} & A_{33} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} \end{vmatrix} = A_{31} \cdot A_{42} \cdot A_{53} + A_{51} \cdot A_{32} \cdot A_{43} + A_{33} \cdot A_{41} \cdot A_{52} - \\
 & - A_{33} \cdot A_{42} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{52} \cdot A_{43} - A_{53} \cdot A_{41} \cdot A_{32}
 \end{aligned} \tag{П.46}$$

Подставим расчетные выражения определителей в (П.45):

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{A}}_{25} = & A_{11} \cdot (A_{32} \cdot A_{43} \cdot A_{54} + A_{52} \cdot A_{33} \cdot A_{44} + A_{34} \cdot A_{42} \cdot A_{53} - A_{34} \cdot A_{43} \cdot A_{52} - \\
 & - A_{32} \cdot A_{53} \cdot A_{44} - A_{54} \cdot A_{42} \cdot A_{33}) + A_{12} \cdot (A_{31} \cdot A_{43} \cdot A_{55} + A_{51} \cdot A_{33} \cdot A_{45} + \\
 & + A_{35} \cdot A_{41} \cdot A_{53} - A_{35} \cdot A_{43} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{53} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{41} \cdot A_{33}) + \\
 & + A_{13} \cdot (A_{31} \cdot A_{42} \cdot A_{54} + A_{51} \cdot A_{32} \cdot A_{44} + A_{34} \cdot A_{41} \cdot A_{52} - A_{34} \cdot A_{42} \cdot A_{51} - \\
 & - A_{31} \cdot A_{52} \cdot A_{44} - A_{54} \cdot A_{41} \cdot A_{32}) + A_{14} \cdot (A_{31} \cdot A_{42} \cdot A_{53} + A_{51} \cdot A_{32} \cdot A_{43} + \\
 & + A_{33} \cdot A_{41} \cdot A_{52} - A_{33} \cdot A_{42} \cdot A_{51} - A_{31} \cdot A_{52} \cdot A_{43} - A_{53} \cdot A_{41} \cdot A_{32})
 \end{aligned} \tag{П.47}$$

Определим алгебраическое дополнение к элементам матрицы $\tilde{\mathbf{A}}_{31}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_{31} = (-1)^{3+1} &= \begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\ A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} = A_{12} \cdot \begin{vmatrix} A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} + \\ &+ A_{13} \cdot \begin{vmatrix} A_{22} & A_{24} & A_{25} \\ A_{42} & A_{44} & A_{45} \\ A_{52} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} + A_{14} \cdot \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} & A_{25} \\ A_{42} & A_{43} & A_{45} \\ A_{52} & A_{53} & A_{55} \end{vmatrix} + A_{15} \cdot \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{42} & A_{43} & A_{44} \\ A_{52} & A_{53} & A_{54} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (\text{П.48})$$

Для нахождения определителя матрицы воспользуемся методом треугольника:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} &= A_{23} \cdot A_{44} \cdot A_{55} + A_{53} \cdot A_{24} \cdot A_{45} + A_{25} \cdot A_{43} \cdot A_{54} - \\ &- A_{25} \cdot A_{43} \cdot A_{54} - A_{23} \cdot A_{54} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{43} \cdot A_{24} \\ \begin{vmatrix} A_{22} & A_{24} & A_{25} \\ A_{42} & A_{44} & A_{45} \\ A_{52} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} &= A_{22} \cdot A_{44} \cdot A_{55} + A_{55} \cdot A_{24} \cdot A_{45} + A_{25} \cdot A_{42} \cdot A_{54} - \\ &- A_{25} \cdot A_{44} \cdot A_{52} - A_{22} \cdot A_{54} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{42} \cdot A_{24} \\ \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} & A_{25} \\ A_{42} & A_{43} & A_{45} \\ A_{52} & A_{53} & A_{55} \end{vmatrix} &= A_{22} \cdot A_{43} \cdot A_{55} + A_{52} \cdot A_{23} \cdot A_{45} + A_{25} \cdot A_{42} \cdot A_{53} - \\ &- A_{25} \cdot A_{43} \cdot A_{52} - A_{22} \cdot A_{53} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{42} \cdot A_{23} \\ \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{42} & A_{43} & A_{44} \\ A_{52} & A_{53} & A_{54} \end{vmatrix} &= A_{22} \cdot A_{43} \cdot A_{54} + A_{52} \cdot A_{23} \cdot A_{44} + A_{24} \cdot A_{42} \cdot A_{53} - \\ &- A_{24} \cdot A_{43} \cdot A_{43} - A_{22} \cdot A_{53} \cdot A_{44} - A_{54} \cdot A_{42} \cdot A_{23} \end{aligned} \quad (\text{П.49})$$

Подставим расчетные выражения определителей в (П.48):

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_{31} &= A_{12} \cdot (A_{23} \cdot A_{44} \cdot A_{55} + A_{53} \cdot A_{24} \cdot A_{45} + A_{25} \cdot A_{43} \cdot A_{54} - A_{25} \cdot A_{43} \cdot A_{54} - \\ &- A_{23} \cdot A_{54} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{43} \cdot A_{24}) + A_{13} \cdot (A_{22} \cdot A_{44} \cdot A_{55} + A_{55} \cdot A_{24} \cdot A_{45} + \\ &+ A_{25} \cdot A_{42} \cdot A_{54} - A_{25} \cdot A_{44} \cdot A_{52} - A_{22} \cdot A_{54} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{42} \cdot A_{24}) + \\ &+ A_{14} \cdot (A_{22} \cdot A_{43} \cdot A_{55} + A_{52} \cdot A_{23} \cdot A_{45} + A_{25} \cdot A_{42} \cdot A_{53} - A_{25} \cdot A_{43} \cdot A_{52} - \\ &- A_{22} \cdot A_{53} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{42} \cdot A_{23}) + A_{15} \cdot (A_{22} \cdot A_{43} \cdot A_{54} + A_{52} \cdot A_{23} \cdot A_{44} + \\ &+ A_{24} \cdot A_{42} \cdot A_{53} - A_{24} \cdot A_{43} \cdot A_{43} - A_{22} \cdot A_{53} \cdot A_{44} - A_{54} \cdot A_{42} \cdot A_{23}) \end{aligned} \quad (\text{П.50})$$

Определим алгебраическое дополнение к элементам матрицы $\tilde{\mathbf{A}}_{32}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_{32} = (-1)^{3+2} = & \begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\ A_{21} & A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ A_{41} & A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ A_{51} & A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} = A_{11} \cdot \begin{vmatrix} A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} + \\ & + A_{13} \cdot \begin{vmatrix} A_{21} & A_{24} & A_{25} \\ A_{41} & A_{44} & A_{45} \\ A_{51} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} + A_{14} \cdot \begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} & A_{25} \\ A_{41} & A_{43} & A_{45} \\ A_{51} & A_{53} & A_{55} \end{vmatrix} + A_{15} \cdot \begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} & A_{24} \\ A_{41} & A_{43} & A_{44} \\ A_{51} & A_{53} & A_{54} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (\text{П.51})$$

Для нахождения определителя матрицы воспользуемся методом треугольника:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} = A_{23} \cdot A_{44} \cdot A_{55} + A_{53} \cdot A_{24} \cdot A_{45} + A_{25} \cdot A_{43} \cdot A_{54} - \\ & - A_{25} \cdot A_{44} \cdot A_{53} - A_{23} \cdot A_{54} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{43} \cdot A_{24} \\ & \begin{vmatrix} A_{21} & A_{24} & A_{25} \\ A_{41} & A_{44} & A_{45} \\ A_{51} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} = A_{21} \cdot A_{44} \cdot A_{55} + A_{51} \cdot A_{24} \cdot A_{45} + A_{25} \cdot A_{41} \cdot A_{54} - \\ & - A_{25} \cdot A_{44} \cdot A_{51} - A_{21} \cdot A_{54} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{41} \cdot A_{24} \\ & \begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} & A_{25} \\ A_{41} & A_{43} & A_{45} \\ A_{51} & A_{53} & A_{55} \end{vmatrix} = A_{21} \cdot A_{43} \cdot A_{55} + A_{25} \cdot A_{41} \cdot A_{53} + A_{51} \cdot A_{23} \cdot A_{45} - \\ & - A_{25} \cdot A_{43} \cdot A_{51} - A_{21} \cdot A_{53} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{41} \cdot A_{23} \\ & \begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} & A_{24} \\ A_{41} & A_{43} & A_{44} \\ A_{51} & A_{53} & A_{54} \end{vmatrix} = A_{21} \cdot A_{43} \cdot A_{54} + A_{51} \cdot A_{23} \cdot A_{44} + A_{24} \cdot A_{41} \cdot A_{53} - \\ & - A_{24} \cdot A_{43} \cdot A_{51} - A_{21} \cdot A_{53} \cdot A_{44} - A_{54} \cdot A_{41} \cdot A_{23} \end{aligned} \quad (\text{П.52})$$

Подставим расчетные выражения определителей в (П.51):

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_{32} = & A_{11} \cdot (A_{23} \cdot A_{44} \cdot A_{55} + A_{53} \cdot A_{24} \cdot A_{45} + A_{25} \cdot A_{43} \cdot A_{54} - A_{25} \cdot A_{44} \cdot A_{53} - \\ & - A_{23} \cdot A_{54} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{43} \cdot A_{24}) + A_{13} \cdot (A_{21} \cdot A_{44} \cdot A_{55} + A_{51} \cdot A_{24} \cdot A_{45} + \\ & + A_{25} \cdot A_{41} \cdot A_{54} - A_{25} \cdot A_{44} \cdot A_{51} - A_{21} \cdot A_{54} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{41} \cdot A_{24}) + \\ & + A_{14} \cdot (A_{21} \cdot A_{43} \cdot A_{55} + A_{25} \cdot A_{41} \cdot A_{53} + A_{51} \cdot A_{23} \cdot A_{45} - A_{25} \cdot A_{43} \cdot A_{51} - \\ & - A_{21} \cdot A_{53} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{41} \cdot A_{23}) + A_{15} \cdot (A_{21} \cdot A_{43} \cdot A_{54} + A_{51} \cdot A_{23} \cdot A_{44} + \\ & + A_{24} \cdot A_{41} \cdot A_{53} - A_{24} \cdot A_{43} \cdot A_{51} - A_{21} \cdot A_{53} \cdot A_{44} - A_{54} \cdot A_{41} \cdot A_{23}) \end{aligned} \quad (\text{П.53})$$

Определим алгебраическое дополнение к элементам матрицы $\tilde{\mathbf{A}}_{33}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_{33} = (-1)^{3+3} &= \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{14} & A_{15} \\ A_{21} & A_{22} & A_{24} & A_{25} \\ A_{41} & A_{42} & A_{44} & A_{45} \\ A_{51} & A_{52} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} = A_{11} \cdot \begin{vmatrix} A_{22} & A_{24} & A_{25} \\ A_{42} & A_{44} & A_{45} \\ A_{52} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} + \\ &+ A_{12} \cdot \begin{vmatrix} A_{21} & A_{24} & A_{25} \\ A_{41} & A_{44} & A_{45} \\ A_{51} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} + A_{14} \cdot \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{25} \\ A_{41} & A_{42} & A_{45} \\ A_{51} & A_{52} & A_{55} \end{vmatrix} + A_{15} \cdot \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{24} \\ A_{41} & A_{42} & A_{44} \\ A_{51} & A_{52} & A_{54} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (\text{П.54})$$

Для нахождения определителя матрицы воспользуемся методом треугольника:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} A_{22} & A_{24} & A_{25} \\ A_{42} & A_{44} & A_{45} \\ A_{52} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} &= A_{22} \cdot A_{44} \cdot A_{55} + A_{52} \cdot A_{24} \cdot A_{45} + A_{25} \cdot A_{42} \cdot A_{54} - \\ &- A_{25} \cdot A_{44} \cdot A_{52} - A_{22} \cdot A_{54} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{42} \cdot A_{24} \\ \begin{vmatrix} A_{21} & A_{24} & A_{25} \\ A_{41} & A_{44} & A_{45} \\ A_{51} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} &= A_{21} \cdot A_{44} \cdot A_{55} + A_{51} \cdot A_{24} \cdot A_{45} + A_{25} \cdot A_{41} \cdot A_{54} - \\ &- A_{25} \cdot A_{44} \cdot A_{51} - A_{21} \cdot A_{54} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{41} \cdot A_{24} \\ \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{25} \\ A_{41} & A_{25} & A_{45} \\ A_{51} & A_{52} & A_{55} \end{vmatrix} &= A_{21} \cdot A_{42} \cdot A_{55} + A_{51} \cdot A_{22} \cdot A_{45} + A_{25} \cdot A_{41} \cdot A_{52} - \\ &- A_{25} \cdot A_{25} \cdot A_{51} - A_{21} \cdot A_{52} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{41} \cdot A_{22} \\ \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{24} \\ A_{41} & A_{42} & A_{44} \\ A_{51} & A_{52} & A_{54} \end{vmatrix} &= A_{21} \cdot A_{42} \cdot A_{54} + A_{24} \cdot A_{41} \cdot A_{52} + A_{51} \cdot A_{22} \cdot A_{44} - \\ &- A_{24} \cdot A_{42} \cdot A_{51} - A_{21} \cdot A_{52} \cdot A_{44} - A_{54} \cdot A_{41} \cdot A_{22} \end{aligned} \quad (\text{П.55})$$

Подставим расчетные выражения определителей в (П.54):

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_{33} &= A_{11} \cdot (A_{22} \cdot A_{44} \cdot A_{55} + A_{52} \cdot A_{24} \cdot A_{45} + A_{25} \cdot A_{42} \cdot A_{54} - \\ &- A_{25} \cdot A_{44} \cdot A_{52} - \\ &- A_{22} \cdot A_{54} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{42} \cdot A_{24}) + A_{12} \cdot (A_{21} \cdot A_{44} \cdot A_{55} + A_{51} \cdot A_{24} \cdot A_{45} + \\ &+ A_{25} \cdot A_{41} \cdot A_{54} - A_{25} \cdot A_{44} \cdot A_{51} - A_{21} \cdot A_{54} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{41} \cdot A_{24}) + \\ &+ A_{14} \cdot (A_{21} \cdot A_{42} \cdot A_{55} + A_{51} \cdot A_{22} \cdot A_{45} + A_{25} \cdot A_{41} \cdot A_{52} - A_{25} \cdot A_{25} \cdot A_{51} - \\ &- A_{21} \cdot A_{52} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{41} \cdot A_{22}) + A_{15} \cdot (A_{21} \cdot A_{42} \cdot A_{54} + A_{24} \cdot A_{41} \cdot A_{52} + \\ &+ A_{51} \cdot A_{22} \cdot A_{44} - A_{24} \cdot A_{42} \cdot A_{51} - A_{21} \cdot A_{52} \cdot A_{44} - A_{54} \cdot A_{41} \cdot A_{22}) \end{aligned} \quad (\text{П.56})$$

Определим алгебраическое дополнение к элементам матрицы $\tilde{\mathbf{A}}_{34}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_{34} = (-1)^{3+4} &= \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{15} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{25} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{45} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{55} \end{vmatrix} = A_{11} \cdot \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} & A_{25} \\ A_{42} & A_{43} & A_{45} \\ A_{52} & A_{53} & A_{55} \end{vmatrix} + \\ &+ A_{12} \cdot \begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} & A_{25} \\ A_{41} & A_{43} & A_{45} \\ A_{51} & A_{53} & A_{55} \end{vmatrix} + A_{13} \cdot \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{24} \\ A_{41} & A_{42} & A_{44} \\ A_{51} & A_{52} & A_{54} \end{vmatrix} + A_{15} \cdot \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} \\ A_{51} & A_{53} & A_{53} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (\text{П.57})$$

Для нахождения определителя матрицы воспользуемся методом треугольника:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} & A_{25} \\ A_{42} & A_{43} & A_{45} \\ A_{52} & A_{53} & A_{55} \end{vmatrix} &= A_{22} \cdot A_{43} \cdot A_{55} + A_{52} \cdot A_{23} \cdot A_{45} + A_{25} \cdot A_{42} \cdot A_{53} \\ &- A_{25} \cdot A_{43} \cdot A_{52} - A_{22} \cdot A_{53} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{42} \cdot A_{23} \\ \begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} & A_{25} \\ A_{41} & A_{43} & A_{45} \\ A_{51} & A_{53} & A_{55} \end{vmatrix} &= A_{21} \cdot A_{43} \cdot A_{55} + A_{51} \cdot A_{23} \cdot A_{45} + A_{25} \cdot A_{25} \cdot A_{53} - \\ &- A_{25} \cdot A_{43} \cdot A_{51} - A_{21} \cdot A_{53} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{41} \cdot A_{23} \\ \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{24} \\ A_{41} & A_{42} & A_{44} \\ A_{51} & A_{52} & A_{54} \end{vmatrix} &= A_{21} \cdot A_{21} \cdot A_{54} + A_{51} \cdot A_{22} \cdot A_{44} + A_{24} \cdot A_{41} \cdot A_{52} - \\ &- A_{24} \cdot A_{42} \cdot A_{51} - A_{21} \cdot A_{52} \cdot A_{44} - A_{54} \cdot A_{41} \cdot A_{22} \\ \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} \\ A_{51} & A_{53} & A_{53} \end{vmatrix} &= A_{21} \cdot A_{42} \cdot A_{53} + A_{51} \cdot A_{22} \cdot A_{43} + A_{23} \cdot A_{41} \cdot A_{53} \\ &- A_{23} \cdot A_{42} \cdot A_{53} - A_{21} \cdot A_{53} \cdot A_{43} - A_{53} \cdot A_{41} \cdot A_{22} \end{aligned} \quad (\text{П.58})$$

Подставим расчетные выражения определителей в (П.57):

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_{34} &= A_{11} \cdot (A_{22} \cdot A_{43} \cdot A_{55} + A_{52} \cdot A_{23} \cdot A_{45} + A_{25} \cdot A_{42} \cdot A_{53} - A_{25} \cdot A_{43} \cdot A_{52} - \\ &- A_{22} \cdot A_{53} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{42} \cdot A_{23}) + A_{12} \cdot (A_{21} \cdot A_{43} \cdot A_{55} + A_{51} \cdot A_{23} \cdot A_{45} + A_{25} \cdot A_{25} \cdot A_{53} - \\ &- A_{25} \cdot A_{43} \cdot A_{51} - A_{21} \cdot A_{53} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{41} \cdot A_{23}) + A_{13} \cdot (A_{21} A_{21} A_{54} + A_{51} \cdot A_{22} \cdot A_{44} + \\ &+ A_{24} \cdot A_{41} \cdot A_{52} - A_{24} \cdot A_{42} \cdot A_{51} - A_{21} \cdot A_{52} \cdot A_{44} - A_{54} A_{41} A_{22}) + A_{15} \cdot (A_{21} \cdot A_{42} \cdot A_{53} + \\ &+ A_{51} \cdot A_{22} \cdot A_{43} + A_{23} \cdot A_{41} \cdot A_{53} - A_{23} \cdot A_{42} \cdot A_{53} - A_{21} \cdot A_{53} \cdot A_{43} - A_{53} \cdot A_{41} \cdot A_{22}) \end{aligned} \quad (\text{П.59})$$

Определим алгебраическое дополнение к элементам матрицы $\tilde{\mathbf{A}}_{35}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_{35} = (-1)^{3+5} &= \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} \end{vmatrix} = A_{11} \cdot \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{42} & A_{43} & A_{44} \\ A_{52} & A_{53} & A_{54} \end{vmatrix} + \\ &+ A_{12} \cdot \begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} & A_{24} \\ A_{41} & A_{43} & A_{44} \\ A_{51} & A_{53} & A_{54} \end{vmatrix} + A_{13} \cdot \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{24} \\ A_{41} & A_{42} & A_{44} \\ A_{51} & A_{52} & A_{54} \end{vmatrix} + A_{14} \cdot \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (\text{П.60})$$

Для нахождения определителя матрицы воспользуемся методом треугольника:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{42} & A_{43} & A_{44} \\ A_{52} & A_{53} & A_{54} \end{vmatrix} &= A_{22} \cdot A_{43} \cdot A_{54} + A_{52} \cdot A_{23} \cdot A_{44} + A_{24} \cdot A_{42} \cdot A_{53} - \\ &- A_{24} \cdot A_{43} \cdot A_{52} - A_{22} \cdot A_{53} \cdot A_{44} - A_{54} \cdot A_{42} \cdot A_{23} \\ \begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} & A_{24} \\ A_{41} & A_{43} & A_{44} \\ A_{51} & A_{53} & A_{54} \end{vmatrix} &= A_{21} \cdot A_{43} \cdot A_{54} + A_{51} \cdot A_{23} \cdot A_{44} + A_{24} \cdot A_{41} \cdot A_{53} - \\ &- A_{24} \cdot A_{43} \cdot A_{51} - A_{21} \cdot A_{21} \cdot A_{44} - A_{54} \cdot A_{41} \cdot A_{23} \\ \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{24} \\ A_{41} & A_{42} & A_{44} \\ A_{51} & A_{52} & A_{54} \end{vmatrix} &= A_{21} \cdot A_{42} \cdot A_{54} + A_{51} \cdot A_{22} \cdot A_{44} + A_{24} \cdot A_{41} \cdot A_{52} - \\ &- A_{24} \cdot A_{42} \cdot A_{51} - A_{21} \cdot A_{52} \cdot A_{44} - A_{54} \cdot A_{41} \cdot A_{22} \\ \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} \end{vmatrix} &= A_{21} \cdot A_{42} \cdot A_{53} + A_{51} \cdot A_{22} \cdot A_{43} + A_{23} \cdot A_{41} \cdot A_{52} - \\ &- A_{23} \cdot A_{42} \cdot A_{51} - A_{21} \cdot A_{52} \cdot A_{43} - A_{53} \cdot A_{41} \cdot A_{22} \end{aligned} \quad (\text{П.61})$$

Подставим расчетные выражения определителей в (П.60):

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_{35} &= A_{11} \cdot (A_{22} \cdot A_{43} \cdot A_{54} + A_{52} \cdot A_{23} \cdot A_{44} + A_{24} \cdot A_{42} \cdot A_{53} - A_{24} \cdot A_{43} \cdot A_{52} - \\ &- A_{22} \cdot A_{53} \cdot A_{44} - A_{54} \cdot A_{42} \cdot A_{23}) + A_{12} \cdot (A_{21} \cdot A_{43} \cdot A_{54} + A_{51} \cdot A_{23} \cdot A_{44} + \\ &+ A_{24} \cdot A_{41} \cdot A_{53} - A_{24} \cdot A_{43} \cdot A_{51} - A_{21} \cdot A_{21} \cdot A_{44} - A_{54} \cdot A_{41} \cdot A_{23}) + \\ &+ A_{13} \cdot (A_{21} \cdot A_{42} \cdot A_{54} + A_{51} \cdot A_{22} \cdot A_{44} + A_{24} \cdot A_{41} \cdot A_{52} - A_{24} \cdot A_{42} \cdot A_{51} - \\ &- A_{21} \cdot A_{52} \cdot A_{44} - A_{54} \cdot A_{41} \cdot A_{22}) + A_{14} \cdot (A_{21} \cdot A_{42} \cdot A_{53} + A_{51} \cdot A_{22} \cdot A_{43} + \\ &+ A_{23} \cdot A_{41} \cdot A_{52} - A_{23} \cdot A_{42} \cdot A_{51} - A_{21} \cdot A_{52} \cdot A_{43} - A_{53} \cdot A_{41} \cdot A_{22}) \end{aligned} \quad (\text{П.62})$$

Определим алгебраическое дополнение к элементам матрицы $\tilde{\mathbf{A}}_{41}$:

$$\tilde{\mathbf{A}}_{41} = (-1)^{4+1} = \begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\ A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} = A_{12} \cdot \begin{vmatrix} A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} +$$

$$+ A_{13} \cdot \begin{vmatrix} A_{22} & A_{24} & A_{25} \\ A_{32} & A_{34} & A_{35} \\ A_{52} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} + A_{14} \cdot \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} & A_{25} \\ A_{32} & A_{33} & A_{35} \\ A_{52} & A_{53} & A_{55} \end{vmatrix} + A_{15} \cdot \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{52} & A_{53} & A_{54} \end{vmatrix}$$

Для нахождения определителя матрицы воспользуемся методом треугольника:

$$\begin{vmatrix} A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} = A_{23} \cdot A_{34} \cdot A_{55} + A_{55} \cdot A_{24} \cdot A_{35} + A_{25} \cdot A_{33} \cdot A_{54} -$$

$$- A_{25} \cdot A_{34} \cdot A_{53} - A_{23} \cdot A_{54} \cdot A_{35} - A_{55} \cdot A_{33} \cdot A_{24}$$

$$\begin{vmatrix} A_{22} & A_{24} & A_{25} \\ A_{32} & A_{34} & A_{35} \\ A_{52} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} = A_{22} \cdot A_{34} \cdot A_{55} + A_{52} \cdot A_{24} \cdot A_{24} + A_{25} \cdot A_{25} \cdot A_{54} -$$

$$- A_{25} \cdot A_{34} \cdot A_{52} - A_{22} \cdot A_{54} \cdot A_{35} - A_{55} \cdot A_{32} \cdot A_{24}$$

$$\begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} & A_{25} \\ A_{32} & A_{33} & A_{35} \\ A_{52} & A_{53} & A_{55} \end{vmatrix} = A_{22} \cdot A_{33} \cdot A_{55} + A_{52} \cdot A_{23} \cdot A_{35} + A_{25} \cdot A_{32} \cdot A_{53} -$$

$$- A_{25} \cdot A_{25} \cdot A_{25} - A_{22} \cdot A_{53} \cdot A_{35} - A_{55} \cdot A_{32} \cdot A_{23}$$

$$\begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{52} & A_{53} & A_{54} \end{vmatrix} = A_{22} \cdot A_{33} \cdot A_{33} + A_{52} \cdot A_{23} \cdot A_{34} + A_{24} \cdot A_{32} \cdot A_{53} -$$

$$- A_{24} \cdot A_{33} \cdot A_{52} - A_{22} \cdot A_{53} \cdot A_{34} - A_{54} \cdot A_{32} \cdot A_{23}$$

(П.64)

Подставим расчетные выражения определителей в (П.63):

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_{41} = & A_{12} \cdot (A_{23} \cdot A_{34} \cdot A_{55} + A_{55} \cdot A_{24} \cdot A_{35} + A_{25} \cdot A_{33} \cdot A_{54} - A_{25} \cdot A_{34} \cdot A_{53} - \\ & - A_{23} \cdot A_{54} \cdot A_{35} - A_{55} \cdot A_{33} \cdot A_{24}) + A_{13} \cdot (A_{22} \cdot A_{34} \cdot A_{55} + A_{52} \cdot A_{24} \cdot A_{24} + \\ & + A_{25} \cdot A_{25} \cdot A_{54} - A_{25} \cdot A_{34} \cdot A_{52} - A_{22} \cdot A_{54} \cdot A_{35} - A_{55} \cdot A_{32} \cdot A_{24}) + \\ & + A_{14} \cdot (A_{22} \cdot A_{33} \cdot A_{55} + A_{52} \cdot A_{23} \cdot A_{35} + A_{25} \cdot A_{32} \cdot A_{53} - A_{25} \cdot A_{25} \cdot A_{25} - \\ & - A_{22} \cdot A_{53} \cdot A_{35} - A_{55} \cdot A_{32} \cdot A_{23}) + A_{15} \cdot (A_{22} \cdot A_{33} \cdot A_{33} + A_{52} \cdot A_{23} \cdot A_{34} + \\ & + A_{24} \cdot A_{32} \cdot A_{53} - A_{24} \cdot A_{33} \cdot A_{52} - A_{22} \cdot A_{53} \cdot A_{34} - A_{54} \cdot A_{32} \cdot A_{23}) \end{aligned}$$

(П.65)

Определим алгебраическое дополнение к элементам матрицы $\tilde{\mathbf{A}}_{42}$:

$$\tilde{\mathbf{A}}_{42} = (-1)^{4+2} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\ A_{21} & A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ A_{31} & A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ A_{51} & A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} = A_{11} \cdot \begin{vmatrix} A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} +$$

$$+ A_{13} \cdot \begin{vmatrix} A_{21} & A_{24} & A_{25} \\ A_{31} & A_{34} & A_{35} \\ A_{51} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} + A_{14} \cdot \begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} & A_{25} \\ A_{31} & A_{33} & A_{35} \\ A_{51} & A_{53} & A_{55} \end{vmatrix} + A_{15} \cdot \begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{33} & A_{34} \\ A_{51} & A_{53} & A_{54} \end{vmatrix} \quad (\text{П.66})$$

Для нахождения определителя матрицы воспользуемся методом треугольника:

$$\begin{vmatrix} A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} = A_{23} \cdot A_{34} \cdot A_{55} + A_{53} \cdot A_{24} \cdot A_{35} + A_{25} \cdot A_{33} \cdot A_{54} -$$

$$- A_{25} \cdot A_{34} \cdot A_{53} - A_{53} \cdot A_{24} \cdot A_{35} - A_{55} \cdot A_{33} \cdot A_{24}$$

$$\begin{vmatrix} A_{21} & A_{24} & A_{25} \\ A_{31} & A_{34} & A_{35} \\ A_{51} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} = A_{21} \cdot A_{34} \cdot A_{55} + A_{51} \cdot A_{24} \cdot A_{35} + A_{25} \cdot A_{31} \cdot A_{54} -$$

$$- A_{25} \cdot A_{34} \cdot A_{51} - A_{21} \cdot A_{54} \cdot A_{35} - A_{55} \cdot A_{31} \cdot A_{24}$$

$$\begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} & A_{25} \\ A_{31} & A_{33} & A_{35} \\ A_{51} & A_{53} & A_{55} \end{vmatrix} = A_{21} \cdot A_{33} \cdot A_{55} + A_{51} \cdot A_{23} \cdot A_{35} + A_{25} \cdot A_{31} \cdot A_{53} -$$

$$- A_{25} \cdot A_{33} \cdot A_{51} - A_{21} \cdot A_{53} \cdot A_{35} - A_{55} \cdot A_{31} \cdot A_{23}$$

$$\begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{33} & A_{34} \\ A_{51} & A_{53} & A_{54} \end{vmatrix} = A_{21} \cdot A_{33} \cdot A_{34} + A_{51} \cdot A_{23} \cdot A_{34} + A_{24} \cdot A_{31} \cdot A_{53} -$$

$$- A_{24} \cdot A_{33} \cdot A_{51} - A_{21} \cdot A_{53} \cdot A_{34} - A_{54} \cdot A_{31} \cdot A_{23} \quad (\text{П.67})$$

Подставим расчетные выражения определителей в (П.66):

$$\tilde{\mathbf{A}}_{42} = A_{11} \cdot (A_{23} \cdot A_{34} \cdot A_{55} + A_{53} \cdot A_{24} \cdot A_{35} + A_{25} \cdot A_{33} \cdot A_{54} - A_{25} \cdot A_{34} \cdot A_{53} -$$

$$- A_{53} \cdot A_{24} \cdot A_{35} - A_{55} \cdot A_{33} \cdot A_{24}) + A_{13} \cdot (A_{21} \cdot A_{34} \cdot A_{55} + A_{51} \cdot A_{24} \cdot A_{35} +$$

$$+ A_{25} \cdot A_{31} \cdot A_{54} - A_{25} \cdot A_{34} \cdot A_{51} - A_{21} \cdot A_{54} \cdot A_{35} - A_{55} \cdot A_{31} \cdot A_{24}) +$$

$$+ A_{14} \cdot (A_{21} \cdot A_{33} \cdot A_{55} + A_{51} \cdot A_{23} \cdot A_{35} + A_{25} \cdot A_{31} \cdot A_{53} - A_{25} \cdot A_{33} \cdot A_{51} -$$

$$- A_{21} \cdot A_{53} \cdot A_{35} - A_{55} \cdot A_{31} \cdot A_{23}) + A_{15} \cdot (A_{21} \cdot A_{33} \cdot A_{34} + A_{51} \cdot A_{23} \cdot A_{34} +$$

$$+ A_{24} \cdot A_{31} \cdot A_{53} - A_{24} \cdot A_{33} \cdot A_{51} - A_{21} \cdot A_{53} \cdot A_{34} - A_{54} \cdot A_{31} \cdot A_{23}) \quad (\text{П.68})$$

Определим алгебраическое дополнение к элементам матрицы $\tilde{\mathbf{A}}_{43}$:

$$\tilde{\mathbf{A}}_{43} = (-1)^{4+3} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{14} & A_{15} \\ A_{21} & A_{22} & A_{24} & A_{25} \\ A_{31} & A_{32} & A_{34} & A_{35} \\ A_{51} & A_{52} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} = A_{11} \cdot \begin{vmatrix} A_{22} & A_{24} & A_{25} \\ A_{32} & A_{34} & A_{45} \\ A_{52} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} +$$

$$+ A_{12} \cdot \begin{vmatrix} A_{21} & A_{24} & A_{25} \\ A_{31} & A_{34} & A_{35} \\ A_{51} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} + A_{14} \cdot \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{25} \\ A_{31} & A_{32} & A_{35} \\ A_{51} & A_{52} & A_{55} \end{vmatrix} + A_{15} \cdot \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{34} \\ A_{51} & A_{52} & A_{54} \end{vmatrix} \quad (\text{П.69})$$

Для нахождения определителя матрицы воспользуемся методом треугольника:

$$\begin{vmatrix} A_{22} & A_{24} & A_{25} \\ A_{32} & A_{34} & A_{45} \\ A_{52} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} = A_{22} \cdot A_{34} \cdot A_{55} + A_{52} \cdot A_{24} \cdot A_{45} + A_{25} \cdot A_{32} \cdot A_{54} -$$

$$- A_{25} \cdot A_{34} \cdot A_{52} - A_{22} \cdot A_{54} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{32} \cdot A_{24}$$

$$\begin{vmatrix} A_{21} & A_{24} & A_{25} \\ A_{31} & A_{34} & A_{35} \\ A_{51} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix} = A_{21} \cdot A_{34} \cdot A_{55} + A_{51} \cdot A_{24} \cdot A_{35} + A_{25} \cdot A_{31} \cdot A_{54} -$$

$$- A_{25} \cdot A_{34} \cdot A_{51} - A_{21} \cdot A_{54} \cdot A_{35} - A_{55} \cdot A_{31} \cdot A_{24}$$

$$\begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{25} \\ A_{31} & A_{32} & A_{35} \\ A_{51} & A_{52} & A_{55} \end{vmatrix} = A_{21} \cdot A_{32} \cdot A_{55} + A_{51} \cdot A_{22} \cdot A_{35} + A_{25} \cdot A_{31} \cdot A_{52} -$$

$$- A_{25} \cdot A_{32} \cdot A_{51} - A_{21} \cdot A_{52} \cdot A_{35} - A_{55} \cdot A_{31} \cdot A_{22}$$

$$\begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{34} \\ A_{51} & A_{52} & A_{54} \end{vmatrix} = A_{21} \cdot A_{32} \cdot A_{54} + A_{51} \cdot A_{22} \cdot A_{34} + A_{24} \cdot A_{31} \cdot A_{52} -$$

$$- A_{24} \cdot A_{32} \cdot A_{51} - A_{21} \cdot A_{52} \cdot A_{34} - A_{34} \cdot A_{34} \cdot A_{34} \quad (\text{П.70})$$

Подставим расчетные выражения определителей в (П.69):

$$\tilde{\mathbf{A}}_{43} = A_{11} \cdot (A_{22} \cdot A_{34} \cdot A_{55} + A_{52} \cdot A_{24} \cdot A_{45} + A_{25} \cdot A_{32} \cdot A_{54} - A_{25} \cdot A_{34} \cdot A_{52} -$$

$$- A_{22} \cdot A_{54} \cdot A_{45} - A_{55} \cdot A_{32} \cdot A_{24}) + A_{12} \cdot (A_{21} \cdot A_{34} \cdot A_{55} + A_{51} \cdot A_{24} \cdot A_{35} +$$

$$+ A_{25} \cdot A_{31} \cdot A_{54} - A_{25} \cdot A_{34} \cdot A_{51} - A_{21} \cdot A_{54} \cdot A_{35} - A_{55} \cdot A_{31} \cdot A_{24}) +$$

$$+ A_{14} \cdot (A_{21} \cdot A_{32} \cdot A_{55} + A_{51} \cdot A_{22} \cdot A_{35} + A_{25} \cdot A_{31} \cdot A_{52} - A_{25} \cdot A_{32} \cdot A_{51} -$$

$$- A_{21} \cdot A_{52} \cdot A_{35} - A_{55} \cdot A_{31} \cdot A_{22}) + A_{15} \cdot (A_{21} \cdot A_{32} \cdot A_{54} + A_{51} \cdot A_{22} \cdot A_{34} +$$

$$+ A_{24} \cdot A_{31} \cdot A_{52} - A_{24} \cdot A_{32} \cdot A_{51} - A_{21} \cdot A_{52} \cdot A_{34} - A_{34} \cdot A_{34} \cdot A_{34}) \quad (\text{П.71})$$

Определим алгебраическое дополнение к элементам матрицы $\tilde{\mathbf{A}}_{44}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_{44} = (-1)^{4+4} = & \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{15} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{25} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{35} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{55} \end{vmatrix} = A_{11} \cdot \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} & A_{25} \\ A_{32} & A_{33} & A_{35} \\ A_{52} & A_{53} & A_{55} \end{vmatrix} + \\ & + A_{12} \cdot \begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} & A_{25} \\ A_{31} & A_{33} & A_{35} \\ A_{51} & A_{53} & A_{55} \end{vmatrix} + A_{13} \cdot \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{25} \\ A_{31} & A_{32} & A_{35} \\ A_{51} & A_{52} & A_{55} \end{vmatrix} + A_{15} \cdot \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (\text{П.72})$$

Для нахождения определителя матрицы воспользуемся методом треугольника:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} & A_{25} \\ A_{32} & A_{33} & A_{35} \\ A_{52} & A_{53} & A_{55} \end{vmatrix} = A_{22} \cdot A_{33} \cdot A_{55} + A_{25} \cdot A_{32} \cdot A_{53} + A_{25} \cdot A_{32} \cdot A_{53} - \\ & - A_{25} \cdot A_{33} \cdot A_{52} - A_{22} \cdot A_{53} \cdot A_{35} - A_{55} \cdot A_{32} \cdot A_{23} \\ & \begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} & A_{25} \\ A_{31} & A_{33} & A_{35} \\ A_{51} & A_{53} & A_{55} \end{vmatrix} = A_{21} \cdot A_{33} \cdot A_{55} + A_{51} \cdot A_{23} \cdot A_{35} + A_{25} \cdot A_{31} \cdot A_{53} - \\ & - A_{25} \cdot A_{33} \cdot A_{51} - A_{21} \cdot A_{53} \cdot A_{35} - A_{55} \cdot A_{31} \cdot A_{23} \\ & \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{25} \\ A_{31} & A_{32} & A_{35} \\ A_{51} & A_{52} & A_{55} \end{vmatrix} = A_{21} \cdot A_{32} \cdot A_{55} + A_{51} \cdot A_{22} \cdot A_{35} + A_{25} \cdot A_{31} \cdot A_{52} - \\ & - A_{25} \cdot A_{32} \cdot A_{51} - A_{21} \cdot A_{52} \cdot A_{35} - A_{55} \cdot A_{31} \cdot A_{22} \\ & \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} \end{vmatrix} = A_{21} \cdot A_{32} \cdot A_{53} + A_{51} \cdot A_{22} \cdot A_{33} + A_{23} \cdot A_{31} \cdot A_{52} - \\ & - A_{23} \cdot A_{32} \cdot A_{51} - A_{21} \cdot A_{52} \cdot A_{52} - A_{53} \cdot A_{31} \cdot A_{22} \end{aligned} \quad (\text{П.73})$$

Подставим расчетные выражения определителей в (П.72):

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_{44} = & A_{11} \cdot (A_{22} \cdot A_{33} \cdot A_{55} + A_{25} \cdot A_{32} \cdot A_{53} + A_{25} \cdot A_{32} \cdot A_{53} - A_{25} \cdot A_{33} \cdot A_{52} - \\ & - A_{22} \cdot A_{53} \cdot A_{35} - A_{55} \cdot A_{32} \cdot A_{23}) + A_{12} \cdot (A_{21} \cdot A_{33} \cdot A_{55} + A_{51} \cdot A_{23} \cdot A_{35} + \\ & + A_{25} \cdot A_{31} \cdot A_{53} - A_{25} \cdot A_{33} \cdot A_{51} - A_{21} \cdot A_{53} \cdot A_{35} - A_{55} \cdot A_{31} \cdot A_{23}) + \\ & + A_{13} \cdot (A_{21} \cdot A_{32} \cdot A_{55} + A_{51} \cdot A_{22} \cdot A_{35} + A_{25} \cdot A_{31} \cdot A_{52} - A_{25} \cdot A_{32} \cdot A_{51} - \\ & - A_{21} \cdot A_{52} \cdot A_{35} - A_{55} \cdot A_{31} \cdot A_{22}) + A_{15} \cdot (A_{21} \cdot A_{32} \cdot A_{53} + A_{51} \cdot A_{22} \cdot A_{33} + \\ & + A_{23} \cdot A_{31} \cdot A_{52} - A_{23} \cdot A_{32} \cdot A_{51} - A_{21} \cdot A_{52} \cdot A_{52} - A_{53} \cdot A_{31} \cdot A_{22}) \end{aligned} \quad (\text{П.74})$$

Определим алгебраическое дополнение к элементам матрицы $\tilde{\mathbf{A}}_{45}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_{45} = (-1)^{4+5} = & \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} \end{vmatrix} = A_{11} \cdot \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{52} & A_{53} & A_{54} \end{vmatrix} + \\ & + A_{12} \cdot \begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{33} & A_{34} \\ A_{51} & A_{53} & A_{54} \end{vmatrix} + A_{13} \cdot \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{34} \\ A_{51} & A_{52} & A_{54} \end{vmatrix} + A_{14} \cdot \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (\text{П.75})$$

Для нахождения определителя матрицы воспользуемся методом треугольника:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{52} & A_{53} & A_{54} \end{vmatrix} = A_{22} \cdot A_{33} \cdot A_{54} + A_{52} \cdot A_{23} \cdot A_{34} + A_{24} \cdot A_{32} \cdot A_{53} - \\ & - A_{24} \cdot A_{33} \cdot A_{52} - A_{52} \cdot A_{52} \cdot A_{34} - A_{54} \cdot A_{32} \cdot A_{23} \\ & \begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{33} & A_{34} \\ A_{51} & A_{53} & A_{54} \end{vmatrix} = A_{21} \cdot A_{33} \cdot A_{54} + A_{51} \cdot A_{23} \cdot A_{34} + A_{24} \cdot A_{31} \cdot A_{53} - \\ & - A_{24} \cdot A_{33} \cdot A_{51} - A_{21} \cdot A_{53} \cdot A_{34} - A_{54} \cdot A_{31} \cdot A_{23} \\ & \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{34} \\ A_{51} & A_{52} & A_{54} \end{vmatrix} = A_{21} \cdot A_{32} \cdot A_{54} + A_{51} \cdot A_{22} \cdot A_{34} + A_{24} \cdot A_{31} \cdot A_{52} - \\ & - A_{24} \cdot A_{32} \cdot A_{51} - A_{21} \cdot A_{52} \cdot A_{34} - A_{54} \cdot A_{31} \cdot A_{22} \\ & \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} \end{vmatrix} = A_{21} \cdot A_{32} \cdot A_{53} + A_{51} \cdot A_{22} \cdot A_{33} + A_{23} \cdot A_{31} \cdot A_{52} - \\ & - A_{23} \cdot A_{32} \cdot A_{51} - A_{21} \cdot A_{52} \cdot A_{33} - A_{53} \cdot A_{31} \cdot A_{22} \end{aligned} \quad (\text{П.76})$$

Подставим расчетные выражения определителей в (П.75):

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_{45} = & A_{11} \cdot (A_{22} \cdot A_{33} \cdot A_{54} + A_{52} \cdot A_{23} \cdot A_{34} + A_{24} \cdot A_{32} \cdot A_{53} - A_{24} \cdot A_{33} \cdot A_{52} - \\ & - A_{52} \cdot A_{52} \cdot A_{34} - A_{54} \cdot A_{32} \cdot A_{23}) + A_{12} \cdot (A_{21} \cdot A_{33} \cdot A_{54} + A_{51} \cdot A_{23} \cdot A_{34} + \\ & + A_{24} \cdot A_{31} \cdot A_{53} - A_{24} \cdot A_{33} \cdot A_{51} - A_{21} \cdot A_{53} \cdot A_{34} - A_{54} \cdot A_{31} \cdot A_{23}) + \\ & + A_{13} \cdot (A_{21} \cdot A_{32} \cdot A_{54} + A_{51} \cdot A_{22} \cdot A_{34} + A_{24} \cdot A_{31} \cdot A_{52} - A_{24} \cdot A_{32} \cdot A_{51} - \\ & - A_{21} \cdot A_{52} \cdot A_{34} - A_{54} \cdot A_{31} \cdot A_{22}) + A_{14} \cdot (A_{21} \cdot A_{32} \cdot A_{53} + A_{51} \cdot A_{22} \cdot A_{33} + \\ & + A_{23} \cdot A_{31} \cdot A_{52} - A_{23} \cdot A_{32} \cdot A_{51} - A_{21} \cdot A_{52} \cdot A_{33} - A_{53} \cdot A_{31} \cdot A_{22}) \end{aligned} \quad (\text{П.77})$$

Определим алгебраическое дополнение к элементам матрицы $\tilde{\mathbf{A}}_{51}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_{51} = (-1)^{5+1} &= \begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\ A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} \end{vmatrix} = A_{12} \cdot \begin{vmatrix} A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ A_{43} & A_{44} & A_{45} \end{vmatrix} + \\ &+ A_{13} \cdot \begin{vmatrix} A_{22} & A_{24} & A_{25} \\ A_{32} & A_{34} & A_{35} \\ A_{42} & A_{44} & A_{45} \end{vmatrix} + A_{14} \cdot \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} & A_{25} \\ A_{32} & A_{33} & A_{35} \\ A_{42} & A_{43} & A_{45} \end{vmatrix} + A_{15} \cdot \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (\text{П.78})$$

Для нахождения определителя матрицы воспользуемся методом треугольника:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ A_{43} & A_{44} & A_{45} \end{vmatrix} &= A_{23} \cdot A_{34} \cdot A_{45} + A_{43} \cdot A_{24} \cdot A_{35} + A_{25} \cdot A_{33} \cdot A_{44} - \\ &- A_{25} \cdot A_{34} \cdot A_{43} - A_{23} \cdot A_{44} \cdot A_{35} - A_{45} \cdot A_{33} \cdot A_{24} \\ \begin{vmatrix} A_{22} & A_{24} & A_{25} \\ A_{32} & A_{34} & A_{35} \\ A_{42} & A_{44} & A_{45} \end{vmatrix} &= A_{22} \cdot A_{22} \cdot A_{45} + A_{42} \cdot A_{24} \cdot A_{35} + A_{25} \cdot A_{32} \cdot A_{44} - \\ &- A_{25} \cdot A_{34} \cdot A_{42} - A_{22} \cdot A_{44} \cdot A_{35} - A_{45} \cdot A_{32} \cdot A_{24} \\ \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} & A_{25} \\ A_{32} & A_{33} & A_{35} \\ A_{42} & A_{43} & A_{45} \end{vmatrix} &= A_{22} \cdot A_{33} \cdot A_{45} + A_{42} \cdot A_{23} \cdot A_{35} + A_{25} \cdot A_{32} \cdot A_{43} - \\ &- A_{25} \cdot A_{33} \cdot A_{42} - A_{22} \cdot A_{43} \cdot A_{35} - A_{45} \cdot A_{32} \cdot A_{32} \\ \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix} &= A_{22} \cdot A_{33} \cdot A_{44} + A_{42} \cdot A_{23} \cdot A_{34} + A_{24} \cdot A_{32} \cdot A_{43} - \\ &- A_{24} \cdot A_{33} \cdot A_{42} - A_{22} \cdot A_{43} \cdot A_{34} - A_{44} \cdot A_{32} \cdot A_{23} \end{aligned} \quad (\text{П.79})$$

Подставим расчетные выражения определителей в (П.78):

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_{51} &= A_{12} \cdot (A_{23} \cdot A_{34} \cdot A_{45} + A_{43} \cdot A_{24} \cdot A_{35} + A_{25} \cdot A_{33} \cdot A_{44} - A_{25} \cdot A_{34} \cdot A_{43} - \\ &- A_{23} \cdot A_{44} \cdot A_{35} - A_{45} \cdot A_{33} \cdot A_{24}) + A_{13} \cdot (A_{22} \cdot A_{22} \cdot A_{45} + A_{42} \cdot A_{24} \cdot A_{35} + \\ &+ A_{25} \cdot A_{32} \cdot A_{44} - A_{25} \cdot A_{34} \cdot A_{42} - A_{22} \cdot A_{44} \cdot A_{35} - A_{45} \cdot A_{32} \cdot A_{24}) + \\ &+ A_{14} \cdot (A_{22} \cdot A_{33} \cdot A_{45} + A_{42} \cdot A_{23} \cdot A_{35} + A_{25} \cdot A_{32} \cdot A_{43} - A_{25} \cdot A_{33} \cdot A_{42} - \\ &- A_{22} \cdot A_{43} \cdot A_{35} - A_{45} \cdot A_{32} \cdot A_{32}) + A_{15} \cdot (A_{22} \cdot A_{33} \cdot A_{44} + A_{42} \cdot A_{23} \cdot A_{34} + \\ &+ A_{24} \cdot A_{32} \cdot A_{43} - A_{24} \cdot A_{33} \cdot A_{42} - A_{22} \cdot A_{43} \cdot A_{34} - A_{44} \cdot A_{32} \cdot A_{23}) \end{aligned} \quad (\text{П.80})$$

Определим алгебраическое дополнение к элементам матрицы $\tilde{\mathbf{A}}_{52}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_{52} = (-1)^{5+2} &= \begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\ A_{21} & A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ A_{31} & A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ A_{41} & A_{43} & A_{44} & A_{45} \end{vmatrix} = A_{11} \cdot \begin{vmatrix} A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ A_{43} & A_{44} & A_{45} \end{vmatrix} + \\ &+ A_{13} \cdot \begin{vmatrix} A_{21} & A_{24} & A_{25} \\ A_{31} & A_{34} & A_{35} \\ A_{41} & A_{44} & A_{45} \end{vmatrix} + A_{14} \cdot \begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} & A_{25} \\ A_{31} & A_{33} & A_{35} \\ A_{41} & A_{43} & A_{45} \end{vmatrix} + A_{15} \cdot \begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (\text{П.81})$$

Для нахождения определителя матрицы воспользуемся методом треугольника:

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ A_{43} & A_{44} & A_{45} \end{vmatrix} = A_{23}A_{34}A_{45} + A_{43}A_{24}A_{35} + A_{25}A_{33}A_{44} - \\ &- A_{25}A_{34}A_{43} - A_{23}A_{44}A_{35} - A_{45}A_{45}A_{24} \\ &\begin{vmatrix} A_{21} & A_{24} & A_{25} \\ A_{31} & A_{34} & A_{35} \\ A_{41} & A_{44} & A_{45} \end{vmatrix} = A_{21}A_{21}A_{45} + A_{41}A_{24}A_{35} + A_{25}A_{31}A_{44} - \\ &- A_{25}A_{34}A_{41} - A_{21}A_{44}A_{35} - A_{45}A_{31}A_{31} \\ &\begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} & A_{25} \\ A_{31} & A_{33} & A_{35} \\ A_{41} & A_{43} & A_{45} \end{vmatrix} = A_{21}A_{21}A_{45} + A_{41}A_{23}A_{35} + A_{25}A_{31}A_{43} - \\ &- A_{25}A_{33}A_{33} - A_{21}A_{43}A_{35} - A_{45}A_{31}A_{23} \\ &\begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix} = A_{21}A_{33}A_{44} + A_{41}A_{23}A_{23} + A_{24}A_{24}A_{43} - \\ &- A_{24}A_{33}A_{41} - A_{21}A_{43}A_{43} - A_{43}A_{43}A_{23} \end{aligned} \quad (\text{П.82})$$

Подставим расчетные выражения определителей в (П.81):

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_{52} &= A_{11} \cdot (A_{23}A_{34}A_{45} + A_{43}A_{24}A_{35} + A_{25}A_{33}A_{44} - A_{25}A_{34}A_{43} - \\ &- A_{23}A_{44}A_{35} - A_{45}A_{45}A_{24}) + A_{13} \cdot (A_{21}A_{21}A_{45} + A_{41}A_{24}A_{35} + A_{25}A_{31}A_{44} - \\ &- A_{25}A_{34}A_{41} - A_{21}A_{44}A_{35} - A_{45}A_{31}A_{31}) + A_{14} \cdot (A_{21}A_{21}A_{45} + A_{41}A_{23}A_{35} + \\ &+ A_{25}A_{31}A_{43} - A_{25}A_{33}A_{33} - A_{21}A_{43}A_{35} - A_{45}A_{31}A_{23}) + A_{15} \cdot (A_{21}A_{33}A_{44} + \\ &+ A_{41}A_{23}A_{23} + A_{24}A_{24}A_{43} - A_{24}A_{33}A_{41} - A_{21}A_{43}A_{43} - A_{43}A_{43}A_{23}) + \end{aligned} \quad (\text{П.83})$$

Определим алгебраическое дополнение к элементам матрицы $\tilde{\mathbf{A}}_{53}$:

$$\tilde{\mathbf{A}}_{53} = (-1)^{5+3} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{14} & A_{15} \\ A_{21} & A_{22} & A_{24} & A_{25} \\ A_{31} & A_{32} & A_{34} & A_{35} \\ A_{41} & A_{42} & A_{44} & A_{45} \end{vmatrix} = A_{11} \cdot \begin{vmatrix} A_{22} & A_{24} & A_{25} \\ A_{32} & A_{34} & A_{35} \\ A_{42} & A_{44} & A_{45} \end{vmatrix} +$$

$$+ A_{12} \cdot \begin{vmatrix} A_{21} & A_{24} & A_{25} \\ A_{31} & A_{34} & A_{35} \\ A_{41} & A_{44} & A_{45} \end{vmatrix} + A_{14} \cdot \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{25} \\ A_{31} & A_{32} & A_{35} \\ A_{41} & A_{42} & A_{45} \end{vmatrix} + A_{15} \cdot \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{44} \end{vmatrix} \quad (\text{П.84})$$

Для нахождения определителя матрицы воспользуемся методом треугольника:

$$\begin{vmatrix} A_{22} & A_{24} & A_{25} \\ A_{32} & A_{34} & A_{35} \\ A_{42} & A_{44} & A_{45} \end{vmatrix} = A_{22} \cdot A_{34} \cdot A_{45} + A_{42} \cdot A_{24} \cdot A_{35} + A_{25} \cdot A_{32} \cdot A_{44} -$$

$$- A_{25} \cdot A_{34} \cdot A_{42} - A_{22} \cdot A_{44} \cdot A_{35} - A_{45} \cdot A_{32} \cdot A_{24}$$

$$\begin{vmatrix} A_{21} & A_{24} & A_{25} \\ A_{31} & A_{34} & A_{35} \\ A_{41} & A_{44} & A_{45} \end{vmatrix} = A_{21} \cdot A_{34} \cdot A_{45} + A_{41} \cdot A_{24} \cdot A_{35} + A_{25} \cdot A_{31} \cdot A_{44} -$$

$$- A_{25} \cdot A_{34} \cdot A_{41} - A_{21} \cdot A_{44} \cdot A_{35} - A_{35} \cdot A_{31} \cdot A_{24}$$

$$\begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{25} \\ A_{31} & A_{32} & A_{35} \\ A_{41} & A_{42} & A_{45} \end{vmatrix} = A_{21} \cdot A_{21} \cdot A_{21} + A_{41} \cdot A_{22} \cdot A_{35} + A_{25} \cdot A_{31} \cdot A_{42} -$$

$$- A_{25} \cdot A_{32} \cdot A_{41} - A_{21} \cdot A_{42} \cdot A_{42} - A_{45} \cdot A_{31} \cdot A_{22}$$

$$\begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{44} \end{vmatrix} = A_{21} \cdot A_{32} \cdot A_{44} + A_{41} \cdot A_{22} \cdot A_{34} + A_{24} \cdot A_{31} \cdot A_{42} -$$

$$- A_{24} \cdot A_{32} \cdot A_{41} - A_{21} \cdot A_{42} \cdot A_{34} - A_{44} \cdot A_{31} \cdot A_{22} \quad (\text{П.85})$$

Подставим расчетные выражения определителей в (П.84):

$$\tilde{\mathbf{A}}_{53} = A_{11} \cdot (A_{22} \cdot A_{34} \cdot A_{45} + A_{42} \cdot A_{24} \cdot A_{35} + A_{25} \cdot A_{32} \cdot A_{44} - A_{25} \cdot A_{34} \cdot A_{42} -$$

$$- A_{22} \cdot A_{44} \cdot A_{35} - A_{45} \cdot A_{32} \cdot A_{24}) + A_{12} \cdot (A_{21} \cdot A_{34} \cdot A_{45} + A_{41} \cdot A_{24} \cdot A_{35} +$$

$$+ A_{25} \cdot A_{31} \cdot A_{44} - A_{25} \cdot A_{34} \cdot A_{41} - A_{21} \cdot A_{44} \cdot A_{35} - A_{35} \cdot A_{31} \cdot A_{24}) +$$

$$+ A_{14} \cdot (A_{21} \cdot A_{21} \cdot A_{21} + A_{41} \cdot A_{22} \cdot A_{35} + A_{25} \cdot A_{31} \cdot A_{42} - A_{25} \cdot A_{32} \cdot A_{41} -$$

$$- A_{21} \cdot A_{42} \cdot A_{42} - A_{45} \cdot A_{31} \cdot A_{22}) + A_{15} \cdot (A_{21} \cdot A_{32} \cdot A_{44} + A_{41} \cdot A_{22} \cdot A_{34} -$$

$$+ A_{24} \cdot A_{31} \cdot A_{42} - A_{24} \cdot A_{32} \cdot A_{41} - A_{21} \cdot A_{42} \cdot A_{34} - A_{44} \cdot A_{31} \cdot A_{22}) \quad (\text{П.86})$$

Определим алгебраическое дополнение к элементам матрицы $\tilde{\mathbf{A}}_{54}$:

$$\tilde{\mathbf{A}}_{54} = (-1)^{5+4} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{15} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{25} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{35} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{45} \end{vmatrix} = A_{11} \cdot \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} & A_{25} \\ A_{32} & A_{33} & A_{35} \\ A_{42} & A_{43} & A_{45} \end{vmatrix} + \quad (\text{П.87})$$

$$+ A_{12} \cdot \begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} & A_{25} \\ A_{31} & A_{33} & A_{35} \\ A_{41} & A_{43} & A_{45} \end{vmatrix} + A_{13} \cdot \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{25} \\ A_{31} & A_{32} & A_{35} \\ A_{41} & A_{42} & A_{45} \end{vmatrix} + A_{15} \cdot \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} \end{vmatrix}$$

Для нахождения определителя матрицы воспользуемся методом треугольника:

$$\begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} & A_{25} \\ A_{32} & A_{33} & A_{35} \\ A_{42} & A_{43} & A_{45} \end{vmatrix} = A_{22} \cdot A_{33} \cdot A_{45} + A_{42} \cdot A_{23} \cdot A_{35} + A_{25} \cdot A_{32} \cdot A_{32} -$$

$$- A_{25} \cdot A_{33} \cdot A_{42} - A_{22} \cdot A_{43} \cdot A_{35} - A_{45} \cdot A_{32} \cdot A_{23}$$

$$\begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} & A_{25} \\ A_{31} & A_{33} & A_{35} \\ A_{41} & A_{43} & A_{45} \end{vmatrix} = A_{21} \cdot A_{33} \cdot A_{45} + A_{41} \cdot A_{23} \cdot A_{35} + A_{25} \cdot A_{31} \cdot A_{43} -$$

$$- A_{25} \cdot A_{33} \cdot A_{41} - A_{21} \cdot A_{43} \cdot A_{35} - A_{45} \cdot A_{31} \cdot A_{23}$$

$$\begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{25} \\ A_{31} & A_{32} & A_{35} \\ A_{41} & A_{42} & A_{45} \end{vmatrix} = A_{21} \cdot A_{32} \cdot A_{45} + A_{41} \cdot A_{22} \cdot A_{35} + A_{25} \cdot A_{31} \cdot A_{42} -$$

$$- A_{25} \cdot A_{32} \cdot A_{41} - A_{21} \cdot A_{42} \cdot A_{35} - A_{45} \cdot A_{45} \cdot A_{22}$$

$$\begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} \end{vmatrix} = A_{21} \cdot A_{32} \cdot A_{43} + A_{41} \cdot A_{22} \cdot A_{33} + A_{23} \cdot A_{31} \cdot A_{42} -$$

$$- A_{41} \cdot A_{42} \cdot A_{23} - A_{21} \cdot A_{42} \cdot A_{42} - A_{43} \cdot A_{31} \cdot A_{22} \quad (\text{П.88})$$

Подставим расчетные выражения определителей в (П.87):

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_{54} = & A_{11} \cdot (A_{22} \cdot A_{33} \cdot A_{45} + A_{42} \cdot A_{23} \cdot A_{35} + A_{25} \cdot A_{32} \cdot A_{32} - A_{25} \cdot A_{33} \cdot A_{42} - \\ & - A_{22} \cdot A_{43} \cdot A_{35} - A_{45} \cdot A_{32} \cdot A_{23}) + A_{12} \cdot (A_{21} \cdot A_{33} \cdot A_{45} + A_{41} \cdot A_{23} \cdot A_{35} + \\ & + A_{25} \cdot A_{31} \cdot A_{43} - A_{25} \cdot A_{33} \cdot A_{41} - A_{21} \cdot A_{43} \cdot A_{35} - A_{45} \cdot A_{31} \cdot A_{23}) + \\ & + A_{13} \cdot (A_{21} \cdot A_{32} \cdot A_{45} + A_{41} \cdot A_{22} \cdot A_{35} + A_{25} \cdot A_{31} \cdot A_{42} - A_{25} \cdot A_{32} \cdot A_{41} - \\ & - A_{21} \cdot A_{42} \cdot A_{35} - A_{45} \cdot A_{45} \cdot A_{22}) + A_{15} \cdot (A_{21} \cdot A_{32} \cdot A_{43} + A_{41} \cdot A_{22} \cdot A_{33} + \\ & + A_{23} \cdot A_{31} \cdot A_{42} - A_{41} \cdot A_{42} \cdot A_{23} - A_{21} \cdot A_{42} \cdot A_{42} - A_{43} \cdot A_{31} \cdot A_{22}) \end{aligned} \quad (\text{П.89})$$

Определим алгебраическое дополнение к элементам матрицы $\tilde{\mathbf{A}}_{55}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_{55} = (-1)^{5+5} = & \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix} = A_{11} \cdot \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix} + \\ & + A_{12} \cdot \begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix} + A_{13} \cdot \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{44} \end{vmatrix} + A_{14} \cdot \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (\text{П.90})$$

Для нахождения определителя матрицы воспользуемся методом треугольника:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix} = A_{22}A_{33}A_{44} + A_{42}A_{23}A_{34} + A_{24}A_{32}A_{43} - \\ & - A_{24}A_{33}A_{42} - A_{22}A_{43}A_{34} - A_{44}A_{32}A_{23} \\ & \begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix} = A_{21}A_{33}A_{44} + A_{41}A_{23}A_{34} + A_{24}A_{31}A_{43} - \\ & - A_{24}A_{33}A_{41} - A_{21}A_{43}A_{34} - A_{44}A_{31}A_{23} \\ & \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{44} \end{vmatrix} = A_{21}A_{32}A_{44} + A_{41}A_{22}A_{34} + A_{24}A_{31}A_{42} - \\ & - A_{24}A_{32}A_{41} - A_{21}A_{42}A_{34} - A_{44}A_{31}A_{22} \\ & \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} \end{vmatrix} = A_{21}A_{32}A_{43} + A_{41}A_{22}A_{33} + A_{23}A_{31}A_{42} - \\ & - A_{23}A_{32}A_{41} - A_{21}A_{42}A_{33} - A_{33}A_{31}A_{22} \end{aligned} \quad (\text{П.91})$$

Подставим расчетные выражения определителей в (П.90):

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_{55} = & A_{11} \cdot (A_{22}A_{33}A_{44} + A_{42}A_{23}A_{34} + A_{24}A_{32}A_{43} - A_{24}A_{33}A_{42} - \\ & - A_{22}A_{43}A_{34} - A_{44}A_{32}A_{23}) + A_{12} \cdot (A_{21}A_{33}A_{44} + A_{41}A_{23}A_{34} + A_{24}A_{31}A_{43} - \\ & - A_{24}A_{33}A_{41} - A_{21}A_{43}A_{34} - A_{44}A_{31}A_{23}) + A_{13} \cdot (A_{21}A_{32}A_{44} + A_{41}A_{22}A_{34} + \\ & + A_{24}A_{31}A_{42} - A_{24}A_{32}A_{41} - A_{21}A_{42}A_{34} - A_{44}A_{31}A_{22}) + A_{14} \cdot (A_{21}A_{32}A_{43} + \\ & + A_{41}A_{22}A_{33} + A_{23}A_{31}A_{42} - A_{23}A_{32}A_{41} - A_{21}A_{42}A_{33} - A_{33}A_{31}A_{22}) \end{aligned} \quad (\text{П.92})$$

Итоговое выражение для расчета:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{13} & \tilde{A}_{14} & \tilde{A}_{15} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} & \tilde{A}_{23} & \tilde{A}_{24} & \tilde{A}_{25} \\ \tilde{A}_{31} & \tilde{A}_{32} & \tilde{A}_{33} & \tilde{A}_{34} & \tilde{A}_{35} \\ \tilde{A}_{41} & \tilde{A}_{42} & \tilde{A}_{43} & \tilde{A}_{44} & \tilde{A}_{45} \\ \tilde{A}_{51} & \tilde{A}_{52} & \tilde{A}_{53} & \tilde{A}_{54} & \tilde{A}_{55} \end{pmatrix}^T \quad (\text{П.93})$$

НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ

Монография

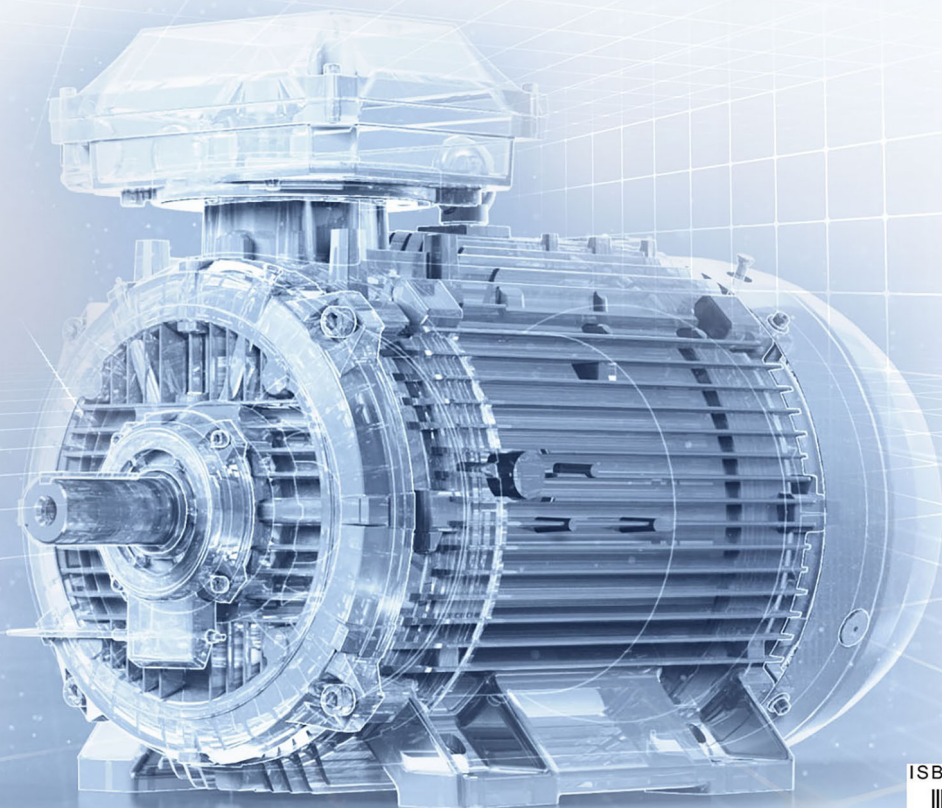
Электронное сетевое издание

Издано в авторской редакции.

ООО «Альпен-Принт»
115230, г. Москва, Электролитный проезд, 3А, с2

Подписано 22.12.2025.

© Баннов Д. М., Полищук В. И., 2025
© ООО «Альпен-Принт», 2025



ISBN 978-5-6055294-5-3



9 785605 529453 >